www.freemaths.fr

Tle

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

« exp » : Études de fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION AVEC EXPONENTIELLE 10

CORRECTION

Partie A:

1. **Déterminons graphiquement la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle de produit A:**

La quantité de produit B dépasse celle de produit A dès que la courbe $\mathscr{C}_g$ se situe au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Or cela se produit quand: $x \in]\, 5\, ;\, 6\, [$ (graphiquement).

Plus précisément, avec la précision permise par le graphique, nous obtenons:

$$x \approx 5,3 \text{ mois}.$$

Au total, la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle de produit A est d'environ: 5, 3 mois.

2. **Déterminons au bout de combien de mois la quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte par le produit B:**

La quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte pour le produit B quand: $g(x) = 3000$.

Or cela se produit quand: $x \in]\, 12\, ;\, 13\, [$ (graphiquement).

Plus précisément, avec la précision permise par le graphique, nous obtenons:

$$x \approx 12,7 \text{ mois}.$$

Au total, la quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte pour le produit B au bout d'environ: 12, 7 mois.

Partie B:

1. a. Déterminons ce que modélise cette fonction:

Comme $h(x) = f(x) + g(x)$, $h(x)$ représente la quantité totale de produit A et de produit B fabriquées par l'usine.

1. b. Montrons que, pour tout $x \in [0; 14]$, $h'(x) = -400\, e^{-0,2x} + 30x + 50$:

Ici: • $f(x) = 2\,000\, e^{-0,2x}$

• $g(x) = 15x^2 + 50x$

• $Df = Dg = [0; 14]$.

f et g sont toutes deux dérivables sur $[0; 14]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' et g' sur $[0; 14]$.

Pour tout $x \in [0; 14]$:

• $f'(x) = -0,2 \times 2\,000 \times e^{-0,2x}$

$= -400\, e^{-0,2x}$;

• $g'(x) = 30x + 50$.

Ainsi, pour tout $x \in [0; 14]$: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

cad: $h'(x) = -400\, e^{-0,2x} + 30x + 50$.

2. a. a1. Montrons que sur [0; 14], l'équation $h'(x) = 0$ admet une solution unique α:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur [a; b].

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de [a; b] tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à [a; b].

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur [a; b], l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à [a; b].

Ici:
- h' est continue sur [0; 14].
- " $k = 0$ " est compris entre: $h'(0) = -350$

  et: $h'(14) \approx 446$.
- h' est strictement croissante sur [0; 14].

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $h'(x) = 0$ ($k = 0$) admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [0; 14].

Au total: $h'(x) = 0$ admet exactement une solution unique α sur [0; 14].

2. a. a2. Donnons un encadrement d'amplitude 0, 1 de α:

Par tâtonnement et à l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $\alpha \in [\ 4,1\ ;\ 4,2\ ]$.

Au total, un encadrement d'amplitude 0, 1 de α est: $4,1 \leqslant \alpha \leqslant 4,2$.

2. b. Déduisons-en les variations de la fonction h sur [0; 14]:

D'après les questions précédentes, nous pouvons en déduire que:

- h est strictement décroissante sur: $[\ 0\ ;\ \alpha\ [$, car $h'(x) < 0$,
- h est strictement croissante sur: $]\ \alpha\ ;\ 14\ ]$, car $h'(x) > 0$,
- h admet un minimum au point: $M\ (\alpha\ ;\ h\ (\alpha))$.

3. a. Déterminons ce que contient alors la variable X après l'exécution de cet algorithme:

Notons qu'après l'exécution de cet algorithme, la variable X contient, à 0, 1 près, la première valeur telle que $Y > 0$ **cad** $h'(X) > 0$ soit: une valeur approchée de α à 0, 1 près.

3. b. Modifions l'algorithme de façon à ce que X contienne une valeur approchée à 0, 001 près de α après l'exécution de l'algorithme:

En supposant toujours que la variable X contienne la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, pour répondre à la question nous devons juste modifier la ligne $X \leftarrow X + 0,1$.

Modification de la ligne $X \leftarrow X + 0,1$ en: $X \leftarrow X + 0,001$.

4. a. Vérifions que H est bien une primitive de la fonction h sur [0; 14]:

Sur l'intervalle [0; 14], H est une primitive de h ssi: $H'(x) = h\ (x)$.

Ici: $H(x) = -10000e^{-0,2x} + 5x^3 + 25x^2$.

D'où: $H'(x) = (-10000) \times (-0,2e^{-0,2x}) + 15x^2 + 50x$

$$= 2000e^{-0,2x} + 15x^2 + 50x = h(x).$$

Au total: H est bien une primitive de h sur [0; 14].

4. b. Calculons une valeur approchée à l'unité près de $\frac{1}{12}\int_0^{12} h(x)\,dx$:

Préalablement, notons que $\frac{1}{12}\int_0^{12} h(x)\,dx$ correspond à **la valeur moyenne " m " de h sur [0; 12]**.

Dans ces conditions: $m = \frac{1}{12}\int_0^{12} h(x)\,dx$

$$= \frac{1}{12}\left[H(x)\right]_0^{12}$$

$$= \frac{1}{12}\left(H(12) - H(0)\right)$$

$$\approx 1778.$$

Ainsi, la valeur moyenne de h sur [0; 12] est d'environ: 1778.

4. c. Donnons une interprétation de m dans le contexte de l'exercice:

Ici, l'interprétation de **m** est: m correspond à la production moyenne en produits A et B sur les 12 premiers mois.