

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Suites Géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CALCUL DE SOMMES

CORRECTION

1. Rappelons la formule demandée:

D'après le cours, pour tout entier naturel n non nul et $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}.$$

2. Calculons S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 :

Pour ce faire, nous allons avoir recours à la formule de la question précédente.

$$a. S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n}:$$

$$\text{Ici: } q = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Dans ces conditions: } S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)}}{1 - \frac{1}{3}}.$$

$$\text{D'où: } S_1 = \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)}\right).$$

$$b. S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} :$$

$$\text{Ici: } a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Dans ces conditions: } S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\text{D'où: } S_2 = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

$$c. S_3 = 5 + 10 + 15 + 20 + \dots + 70:$$

Ici, nous n'allons pas appliquer la formule de la question précédente, mais

$$\text{la formule: } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{En effet: } S_3 = 5(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 14)$$

$$= 5 \times \left(\frac{14 \times (14 + 1)}{2}\right).$$

$$\text{D'où: } S_3 = 525.$$

$$d. S_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^{n-2}}:$$

$$\text{Ici: } a = \frac{1}{3}.$$

Dans ces conditions: $S_4 = \left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \right] - 1$

$$= \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-2+1)}}{1 - \frac{1}{3}} \right] - 1.$$

D'où: $S_4 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}$.

e. $S_5 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{16384}$:

Ici: $q = \frac{1}{4}$.

Dans ces conditions: $S_5 = \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^7 \right] - 1$

$(16384 = 4^7)$

$$= \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^8}{1 - \frac{1}{4}} \right] - 1.$$

D'où: $S_5 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^8$ ou $S_5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^7$.