Spé Maths
Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA TIRELIRE

CORRECTION

1. a. Montrons que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du 1[er] mois est de 35 €:

Il s'agit de calculer U_1.

$$U_1 = \left(U_0 - \frac{1}{4}U_0\right) + 20 \iff U_1 = (20 - 5) + 20$$

$$\Rightarrow U_1 = 35 \text{ euros.}$$

Ainsi, il y aura bien **35 euros** dans la tirelire de Maya à la fin du 1[er] mois.

1. b. Calculons U_2:

Il s'agit de calculer U_2.

De même: $$U_2 = \left(U_1 - \frac{1}{4}U_1\right) + 20 \iff U_2 = \left(35 - \frac{1}{4} \times 35\right) + 20$$

$$\Rightarrow U_2 = 46,25 \text{ euros.}$$

Ainsi, il y aura **46, 25 euros** dans la tirelire de Maya à la fin du second mois.

2. a. Recopions et complétons le tableau:

Le tableau recopié et complété est le suivant:

Valeur de U	20	35	46, 25	54, 69	61, 02	65, 76	69, 32	71, 99
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7
Condition $U < 70$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

2. b. Déterminons et interprétons la valeur affichée à la fin de l'exécution de l'algorithme:

Nous nous arrêtons quand **$N = 7$** car c'est à partir de ce mois là que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya dépassera 70 euros.

Ainsi, à la fin du 7ème mois: la somme d'argent de Maya dans la tirelire sera supérieure à 70 euros.

3. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0 que nous déterminerons:

$V_n = U_n - 80 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 80$

$\iff V_{n+1} = (0,75\, U_n + 20) - 80 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 80 \Rightarrow V_0 = 20 - 80 = -60$ et $U_n = V_n + 80.$

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,75\, [V_n + 80] + 20) - 80$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,75\, V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $V_0 = -60$ euros.

3. b. Précisons V_0:

Comme dit précédemment: $V_0 = -60$ euros.

3. c. Déduisons-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 80 - 60 \times 0,75^n$:

Nous savons que: * $V_n = -60 \times (0,75)^n$ (d'après le cours)

* $U_n = V_n + 80.$

D'où: $U_n = -60 \times (0,75)^n + 80$ ou: $U_n = 80 - 60 \times (0,75)^n.$

3. d. Déterminons le moment que Maya possédera dans sa tirelire au 1^{er} juin 2019:

Au 1^{er} juin 2019: **$n = 12$, car entre le 1^{er} juin 2018 et le 1^{er} juin 2019, il y a 12 mois.**

Donc pour répondre à cette question, nous devons calculer: U_{12}.

$U_{12} = 80 - 60 \times (0,75)^{12}$, car: $U_n = 80 - 60 \times (0,75)^n$.

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons: $U_{12} \approx 78,1$ euros.

Ainsi, le montant que Maya possédera dans sa tirelire au 1^{er} juin 2019 sera d'environ: 78, 1 euros.

3. e. Déterminons la limite de la suite (V_n):

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} U_n - 80$$

$$= \lim_{n \to +\infty} -60 \times (0,75)^n$$

$$= 0 \text{ euros} \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} (0,75)^n = 0, \text{ car: } 0,75 \in]0;1[.$$

Au total: $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ **euros**.

3. f. Déduisons-en la limite de la suite (U_n) et interprétons le résultat obtenu:

Comme $U_n = V_n + 80$, $\lim_{n \to +\infty} U_n = \left(\lim_{n \to +\infty} V_n \right) + 80$

$$= 80 \text{ euros}.$$

En conclusion: au bout de n mois (" n " très grand), la tirelire de Maya contiendra **80 euros**.