

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Suites
arithmético-géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Calculons U_1 et U_2 en donnant le résultat arrondi à l'unité:

- Il s'agit de calculer U_1 .

$$U_1 = (1 + 6\%) U_0 \Leftrightarrow U_1 = 1,06 \times 500$$
$$\Rightarrow U_1 = 530 \text{ films.}$$

Ainsi le nombre de films proposés, un mois après l'ouverture, est de:

530 films.

- Il s'agit de calculer U_2 .

$$U_2 = (1 + 6\%) U_1 \Leftrightarrow U_2 = 1,06 \times 530$$
$$\Rightarrow U_2 = 561,8 \text{ cad } U_2 = 562 \text{ films.}$$

Ainsi le nombre de films proposés, deux mois après l'ouverture, est de:

562 films.

2. Exprimons U_n en fonction de n :

- D'après l'énoncé, à l'ouverture, le nombre de films est de: 500.

D'où: $U_0 = 500$.

- De plus, chaque mois leur nombre augmente de 6%.

Ainsi, pour tout entier naturel n , le nombre de films en " $n + 1$ " est égal au nombre de films en " n " augmenté de 6%.

Donc pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n + 6\% U_n \iff U_{n+1} = 1,06 U_n$$

Ou encore: $U_n = U_0 \times (1,06)^n \implies U_n = 500 \times (1,06)^n$.

Nous sommes donc en présence d'une suite géométrique de raison $q = 1,06$ et de premier terme $U_0 = 500$.

3. Déterminons la limite de la suite (U_n) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 500 \times (1,06)^n \\ &= +\infty \quad \text{car: } 1,06 > 1. \end{aligned}$$

- Donc:
- La suite (U_n) est divergente.
 - Au bout de n mois (" n " très grand), le nombre de films proposés tendra vers l'infini.

Partie B:

1. Recopions et complétons les lignes L_3 , L_5 et L_7 :

Les lignes L_3 , L_5 et L_7 complétées sont les suivantes:

- L_3 : Traitement Tant que $U < 1000$
- L_5 : Affecter à U la valeur $U \times 1,06$
- L_7 : Sortie Afficher N

2. Calculons le nombre de mois recherché:

Il s'agit de résoudre l'inéquation: $U_n \geq 1000$. (2×500)

$$U_n \geq 1000 \Leftrightarrow 500 \times (1,06)^n \geq 1000$$

$$\Leftrightarrow (1,06)^n \geq 2$$

$$\Leftrightarrow n \ln(1,06) \geq \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,06)}, \text{ car: } 1,06 > 1, \text{ et donc: } \ln(1,06) > 0$$

$$\Rightarrow n \geq 11,8956.$$

Nous prendrons $n = 12$ car n est un entier naturel.

Ainsi, 12 mois après l'ouverture, le nombre de films proposés aura doublé pour atteindre 1000 films.

Partie C:

1. Justifions que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 0,9 \times V_n + 2500$:

• D'après l'énoncé, à l'ouverture, le nombre d'abonnés est de: 15000.

D'où: $V_0 = 15000$.

• De plus, chaque mois leur nombre baisse de 10% et 2500 nouveaux abonnés sont enregistrés.

Soient: • V_{n+1} , le nombre d'abonnés au mois "ouverture + (n + 1)",

• V_n , le nombre d'abonnés au mois "ouverture + (n)".

Pour tout entier naturel n , le nombre V_{n+1} d'abonnés est égal au nombre V_n d'abonnés diminué de 10% et augmenté de 2500 "nouveaux abonnés".

Donc pour tout entier naturel n :

$$V_{n+1} = V_n - 10\% V_n + 2500 \iff V_{n+1} = 0,9 V_n + 2500.$$

2. a. Montrons que (W_n) est géométrique et déterminons W_0 et q :

$$\begin{aligned} W_n = V_n - 25000 &\iff W_{n+1} = V_{n+1} - 25000 \\ &\iff W_{n+1} = (0,9 V_n + 2500) - 25000. \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Or: } W_0 = V_0 - 25000 \implies W_0 = -10000 \text{ et } V_n = W_n + 25000.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\iff W_{n+1} = (0,9 [W_n + 25000] + 2500) - 25000 \\ &\implies W_{n+1} = 0,9 W_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (W_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $W_0 = -22.500$.

2. b. Déduisons-en que pour tout entier n , $V_n = 25000 - 10000 \times 0,9^n$:

• Comme $W_{n+1} = 0,9 W_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$W_n = W_0 \times (0,9)^n, \text{ avec: } W_0 = -10000.$$

• De plus, nous savons que:
 * $W_n = -10000 \times (0,9)^n$
 * $V_n = W_n + 25000$.

$$\text{D'où: } V_n = 25000 - 10000 \times (0,9)^n.$$

2. c. Stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la limite de la suite (V_n) quand n tend vers l'infini.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 25000 - 10000 \times (0,9)^n \\ &= 25000 \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,9)^n = 0, \text{ car: } 0,9 \in]0, 1[. \end{aligned}$$

- Donc:
- La suite (V_n) est convergente et converge vers 25 000.
 - Au bout de n mois (" n " très grand), le nombre d'abonnés tendra vers 25 000.
 - D'où: oui, il y aura stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme et ce nombre sera égal à: 25 000 abonnés.