Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

EXPRESSION D'UNE SUITE PAR RÉCURRENCE

1

CORRECTION

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \dfrac{n+1}{n}$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \dfrac{n+1}{n}$ ".

Initialisation: • $U_1 = \dfrac{1+1}{1} = 2$, d'après l'énoncé.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_2 = U_1 - \dfrac{1}{(1)^2 + 1} = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Et: $U_2 = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $U_n = \dfrac{n+1}{n}$

et montrons qu'alors $U_{n+1} = \dfrac{(n+1)+1}{(n+1)}$.

Supposons: $U_n = \dfrac{n+1}{n}$, pour un entier naturel non nul n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow U_n - \frac{1}{n^2+n} = \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n^2+n}$$

$$\Rightarrow U_n - \frac{1}{n^2+n} = \frac{(n+1)(n^2+n) - n}{n(n^2+n)}$$

$$\Rightarrow U_n - \frac{1}{n^2+n} = \frac{n^3+2n^2}{n(n^2+n)}$$

$$\Rightarrow U_n - \frac{1}{n^2+n} = \frac{n^2(n+2)}{n^2(n+1)}$$

$$\Rightarrow U_n - \frac{1}{n^2+n} = \frac{(n+2)}{(n+1)}$$

$$\Rightarrow U_n - \frac{1}{n^2+n} = \frac{(n+1)+1}{(n+1)}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{(n+1)}.$$

Conclusion: pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \dfrac{n+1}{n}$.