Spé Maths
Terminale

Combinatoire & Dénombrement

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

COMBINATOIRE & DÉNOMBREMENT 24

CORRECTION

1. Calculons $\binom{13}{12}$, $\binom{12}{11} + \binom{12}{12}$ et concluons:

• $\binom{13}{12} = \dfrac{13!}{12!\,(13-12)!} = \dfrac{13!}{12!\,(1)!} = 13.$

• $\binom{12}{11} + \binom{12}{12} = \left[\dfrac{12!}{11!\,(12-11)!}\right] + \left[\dfrac{12!}{12!\,(12-12)!}\right] = \dfrac{12!}{11!\,(1)!} + \dfrac{12!}{12!\,(0)!} = 13.$

Ainsi, nous pouvons conclure que: $\binom{13}{12} = \binom{12}{11} + \binom{12}{12}.$

2. Calculons $\binom{7}{3}$, $\binom{6}{2} + \binom{6}{3}$ et concluons:

• $\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!\,(7-3)!} = \dfrac{7!}{3!\,(4)!} = \dfrac{(7 \times 6 \times 5) \times (4!)}{3!\,(4)!} = \dfrac{35 \times 6}{3!} = 35.$

• $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \left[\dfrac{6!}{2!\,(6-2)!}\right] + \left[\dfrac{6!}{3!\,(6-3)!}\right] = \dfrac{6!}{2!\,(4)!} + \dfrac{6!}{3!\,(3)!}$

$$= \frac{(6 \times 5) \times (4!)}{2!\,(4)!} + \frac{(6 \times 5 \times 4) \times (3!)}{3!\,(3)!}$$

$$= 35.$$

Ainsi, nous pouvons conclure que: $\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$.

3. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$:

Pour tout entier naturel **n** et entier naturel **k**, avec $0 \leqslant k \leqslant n$:

- $$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(\,(n+1)-(k+1)\,)!} = \left[\frac{n+1}{k+1}\right] \times \frac{n!}{k! \times (n-k)!}.$$

- $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)\,k!\,(\,(n-k-1)\,)!} \times \left[\frac{n-k}{n-k}\right]$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n! \times (n-k)}{(k+1)\,k!\,(\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \left[1 + \frac{(n-k)}{(k+1)}\right]$$

$$= \left[\frac{1 \times (k+1) + (n-k)}{k+1}\right] \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \left[\frac{n+1}{k+1}\right] \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Ainsi, pour tous entiers naturels n et k ($0 \leqslant k \leqslant n$), nous avons toujours:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$