Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 26

CORRECTION

Partie A:

1. a. Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$:

Ici: • $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $\left(u - \frac{1}{2}(e^v + e^w)\right)$

• $Df = \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Or: • $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

D'où: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(+\infty + 0)$

$= -\infty$.

Au total: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

1. b. Montrons que f est strictement décroissante sur $[\,0\,; +\infty\,[$:

Pour ce faire, nous allons calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Posons: $f = f_1 - \frac{1}{2}(f_2 + f_3)$, avec: $f_1(x) = \frac{7}{2}$, $f_2(x) = e^x$ et $f_3(x) = e^{-x}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme.

f_2 et f_3 sont dérivables sur IR comme fonction " exponentielle ".

Dans ces conditions, la fonction $h = f_2 + f_3$ est dérivable sur IR comme somme de deux fonctions dérivables sur IR.

Et donc, la fonction $g = -\frac{1}{2}(f_2 + f_3)$ est dérivable sur IR.

Par conséquent, f est dérivable sur IR comme somme $(f_1 + g)$ de deux fonctions dérivables sur IR.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in$ IR.

Pour tout $x \in$ IR: $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $\quad (u' - \frac{1}{2}(v' e^v + w' e^w))$

Distinguons 2 cas pour tout $x \in$ IR.

• **1er cas**: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \geqslant 0 \iff e^x \leqslant e^{-x} \iff x \leqslant -x \iff x \leqslant 0$

ou: $x \in]-\infty ; 0]$.

• **2ème cas**: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \leqslant 0 \iff e^x \geqslant e^{-x} \iff x \geqslant -x \iff x \geqslant 0$

ou: $x \in [0 ; +\infty[$.

Au total: • f est croissante sur $]-\infty ; 0]$,

• f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

f est même strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. c. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0; +\infty[$:

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour pouvoir répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.

Ici:
- f est continue sur IR, donc sur $[0; +\infty[$.
- " $k = 0$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0$

  et: $f(0) = \dfrac{5}{2} > 0$.
- f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ $(k = 0)$ admet une unique solution α appartenant à $[0; +\infty[$.

2. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans IR qui sont opposées:

Préalablement, nous remarquons que pour tout réel x:

$f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = f(x).$

On dit que la fonction f est paire.

Nous pouvons donc écrire: $f(x) = 0 \iff f(-x) = 0.$

Dans ces conditions: comme l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$, l'équation $f(-x) = 0$ admet donc une unique solution sur $[0; +\infty[$, ce qui équivaut à dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty; 0]$.

Et nous pouvons noter: $f(\alpha) = f(-\alpha) = 0$, avec: $\alpha \in [0; +\infty[$ et $-\alpha \in]-\infty; 0]$.

Au total, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$:

- $\alpha \in [0; +\infty[$,
- $\beta = -\alpha \in]-\infty; 0]$.

Partie B:

1. Calculons la hauteur d'un arceau:

Ici: • $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$

• $Df = [-\alpha; \alpha]$, avec: $\alpha \in [0; +\infty[$.

La hauteur d'un arceau correspond à $f(0)$. **(maximum de la fonction f)**

Or: $f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{0} + e^{-0})$ **cad**: $f(0) = \frac{5}{2} = 2,5$ mètres.

Ainsi, la hauteur d'un arceau est de: 2,5 mètres.

2. a. Montrons que, pour tout réel x, $1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$:

Nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

D'où: $1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$

$$= 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)$$

$$= \frac{4 + e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$= \frac{2 + e^{2x} + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2.$$

Au total, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$.

2. b. b1. Déduisons-en la valeur de l'intégrale I en fonction de α:

D'après l'énoncé, la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0; \alpha]$ est donnée, en mètre, par:

$$I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Le calcul de I donne: $I = \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2}\, dx$

$$\iff I = \int_0^{\alpha} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\, dx$$

$$\iff I = \frac{1}{2}\left[(e^x - e^{-x})\right]_0^{\alpha}$$

cad: $I = \frac{1}{2}e^{\alpha} - \frac{1}{2}e^{-\alpha}$ mètres.

Ainsi, la valeur de I en fonction de α est: $I = \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha})$ mètres.

2. b. b2. Montrons que la longueur d'un arceau est $L = e^{\alpha} - e^{-\alpha}$:

La valeur exacte de la longueur L d'un arceau sur $[-\alpha ; \alpha]$ est: $L = 2\,I$.

D'où: $L = e^{\alpha} - e^{-\alpha}$.

Ainsi, la longueur d'un arceau est bien: $L = e^{\alpha} - e^{-\alpha}$.

Partie C:

1. Montrons que $\mathcal{A} = 4\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx - 2$:

La quantité de bâche nécessaire pour recouvrir la façade nord est:

$$\mathcal{A}_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx.$$

La quantité de bâche nécessaire pour recouvrir la façade sud est:

$$\mathcal{A}_2 = \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx\right) - (1 \times 2).$$

(1 x 2 = 1 mètre x 2 mètres = aire ouverture)

Ainsi: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$

$$= \left(2 \times \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx\right) - 2.$$

Or: f est paire.

Par conséquent: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2 \times \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$, d'après le cours.

D'où: $\mathcal{A} = \left(4 \times \int_0^{\alpha} f(x)\, dx \right) - 2.$

Au total, nous avons bien: $\mathcal{A} = \left(4 \times \int_0^{\alpha} f(x)\, dx \right) - 2.$

2. Déterminons, au m² près, l'aire totale de la bâche nécessaire:

Soit $\mathcal{A}_T$, l'aire totale de la bâche nécessaire pour réaliser cette serre.

$\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + S$, S étant l'aire de la partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

Or: • $\mathcal{A} = \left(4 \times \int_0^{\alpha} f(x)\, dx \right) - 2$

$$= 4 \times \left[\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x} \right) \right]_0^{\alpha} - 2$$

$$= 4 \times \left(\frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha} \right) \right) - 2$$

$$= 14\,\alpha - 2\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha} \right) - 2.$$

• $S = (3 \times 1{,}50) \times L$

(4 arceaux espacés de 1, 5 mètres, donc: $3 \times 1{,}50$)

$$= 4{,}5 \times \left(e^{\alpha} - e^{-\alpha} \right).$$

Avec: $\alpha = 1{,}92$: $\mathcal{A} = 14\,\alpha - 2\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha} \right) - 2 + 4{,}5\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha} \right)$

$$= 14\,\alpha + 2{,}5\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha} \right) - 2$$

$$= (14 \times 1{,}92) + 2{,}5\left(e^{1{,}92} - e^{-1{,}92} \right) - 2$$

$$\approx 42 \text{ m}^2.$$

Ainsi, l'aire totale demandée est d'environ: 42 m².