

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Intégrale, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Étude graphique

1. Déterminons $f'(3)$:

Nous savons que la tangente à la courbe C_f , au point $x = 3$, passe par les points: $A(3; 4)$ et $B(4; 0)$.

Soit $y = ax + b$, l'équation de cette tangente.

" $a = f'(3)$ " est le coefficient directeur et est tel que:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow a = \frac{0 - 4}{4 - 3} \Rightarrow a = -4.$$

Au total, $f'(3)$ est tel que: $f'(3) = -4$.

2. Donnons le tableau de signe de f' sur l'intervalle $[0, 7; 6]$:

Nous avons le tableau de signe de f' suivant:

x	$0, 7$	1	2	6	
f'	-	0	+	0	-

Partie B: Étude théorique

1. Montrons que $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$.

Ici: • $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-2x+6}$ ($u \times v$)

• $Df = [0, 7; 6]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$ et $f_2(x) = e^{-2x+6}$.

f_1 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[0, 7; 6]$.

f_2 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction exponentielle, donc dérivable sur l'intervalle $[0, 7; 6]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[0, 7; 6]$ comme produit ($f_1 \times f_2$) de 2 fonctions dérivables sur $[0, 7; 6]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0, 7; 6]$.

Pour tout $x \in [0, 7; 6]$:

$$f'(x) = (2x - 2) \times e^{-2x+6} + (x^2 - 2x + 1) \times (-2) \times e^{-2x+6} \quad (u' \times v + u \times v')$$

$$\Rightarrow f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}.$$

Au total, pour tout $x \in [0, 7; 6]$: $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$.

2. a. Étudions le sens de variation de f sur $[0, 7; 6]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [0, 7; 6]$.

Préalablement déterminons les solutions de l'équation: $-2x^2 + 6x - 4 = 0$.

$$\Delta = 4 > 0, \text{ d'où 2 solutions: } \bullet x' = \frac{-6-2}{-4} \Rightarrow x' = 2,$$

$$\bullet x'' = \frac{-6+2}{-4} \Rightarrow x'' = 1.$$

D'où les 3 cas:

$$\bullet 1^{\text{er}} \text{ cas: } f'(x) = 0.$$

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2x^2 + 6x - 4) = 0 \quad (\text{pour tout } x \in [0, 7; 6], e^{-2x+6} > 0)$$

$$\text{cad: } x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

$$\bullet 2^{\text{ème}} \text{ cas: } f'(x) < 0.$$

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6} < 0$$

$$\Leftrightarrow (-2x^2 + 6x - 4) < 0 \quad (\text{pour tout } x \in [0, 7; 6], e^{-2x+6} > 0)$$

$$\text{cad: } x \in [0, 7; 1[\cup]2; 6].$$

$$\bullet 3^{\text{ème}} \text{ cas: } f'(x) > 0.$$

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6} > 0$$

$$\Leftrightarrow (-2x^2 + 6x - 4) > 0 \quad (\text{pour tout } x \in [0, 7; 6], e^{-2x+6} > 0)$$

$$\text{cad: } x \in]1; 2[.$$

Au total: • f est décroissante sur $[0, 7; 1[\cup]2; 6]$,

(car sur $[0, 7; 1] \cup [2; 6]$, $f'(x) \leq 0$)

• f est croissante sur $]1; 2[$.

(car sur $]1; 2]$, $f'(x) \geq 0$)

2. b. Donnons le tableau de variation de f sur $[0, 7; 6]$:

- Comme nous l'avons déjà dit:
- f est décroissante sur $[0, 7; 1] \cup [2; 6]$,
 - f est croissante sur $[1; 2]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0,7	1	2	6	
f'	-	0	+	0	-
f	a	b	c	d	

- Avec:
- $a = f(0,7) \Rightarrow a = \dots$,
 - $b = f(1) \Rightarrow b = 0$,
 - $c = f(2) \Rightarrow c = e^2$,
 - $d = f(6) \Rightarrow d = 25$.

3. a. Déterminons le plus grand intervalle sur lequel f est concave:

Soit $[e; f]$, l'intervalle recherché.

Ici: • $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4) e^{-2x+6}$

• $f''(x) = g(x) = 2(2x^2 - 8x + 7) e^{-2x+6}$. (logiciel)

f est concave sur $[e; f]$ ssi: pour tout $x \in [e; f]$, $f''(x) \leq 0$.

Or le signe de f'' dépend du signe de: $2x^2 - 8x + 7$ (car $e^{-2x+6} > 0$).

Les racines de l'équation $2x^2 - 8x + 7 = 0$ sont donc:

$$x' = \frac{-\sqrt{2} + 4}{2} \text{ et } x'' = \frac{\sqrt{2} + 4}{2}. \quad (\text{logiciel})$$

Dans ces conditions: $f''(x) \leq 0$ ssi $2x^2 - 8x + 7 \leq 0$,

$$\text{cad: } x \in \left[\frac{-\sqrt{2} + 4}{2}; \frac{\sqrt{2} + 4}{2} \right].$$

$$\text{Au total: } f \text{ est concave sur } [e; f] = \left[\frac{-\sqrt{2} + 4}{2}; \frac{\sqrt{2} + 4}{2} \right].$$

3. b. Déterminons les points d'inflexion de f :

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

$$\text{Or c'est le cas quand: } x = \frac{-\sqrt{2} + 4}{2} \text{ et } x = \frac{\sqrt{2} + 4}{2}.$$

Au total, la courbe représentative de f admet 2 points d'inflexion:

$$A = \left(\frac{-\sqrt{2} + 4}{2}; f\left(\frac{-\sqrt{2} + 4}{2}\right) \right) \text{ et } B \left(\frac{\sqrt{2} + 4}{2}; f\left(\frac{\sqrt{2} + 4}{2}\right) \right).$$

3. c. Calculons la valeur exacte de I , puis la valeur arrondie à 10^{-1} :

$$\text{Ici, il s'agit de calculer: } I = \int_3^5 f(x) dx$$

$$\text{cad: } I = \int_3^5 (x^2 - 2x + 1) e^{-2x+6} dx.$$

f est continue sur $[3; 5]$, elle admet donc des primitives sur $[3; 5]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_3^5 f(x) dx$$

$$= [F(x)]_3^5$$

$$= \left[\frac{1}{4} (-2x^2 + 2x - 1) e^{-2x+6} \right]_3^5 \quad (\text{logiciel})$$

$$\Rightarrow I = \frac{13 - 41e^{-4}}{4} \quad \text{ou} \quad I \approx 3,1 \quad (\text{valeur arrondie à } 10^{-1}).$$

$$\text{Au total: } I = \frac{13 - 41e^{-4}}{4} \quad (\text{valeur exacte})$$

$$\text{ou } I \approx 3,1 \quad (\text{valeur arrondie à } 10^{-1}).$$