Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALE, SYNTHÈSE 14

CORRECTION

Partie A:

1. a. est la bonne réponse.

En effet, le coefficient directeur de la tangente T est négatif. Par conséquent les réponses c et d sont à éliminer.

De plus, la tangente passe par les points A et A' qui ont pour coordonnées respectives et approximatives: (-5 ; 1, 4) et (0 ; -0, 5).

Dans ces conditions, le coefficient directeur " a " est tel que:

$$a \approx \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} \iff a \approx \frac{-0,5 - 1,4}{0 - (-5)} \quad \text{cad:} \quad a \approx 0,38.$$

Au total: comme -0, 38 est proche de $-\frac{1}{3}$, nous retiendrons la réponse **a**.

2. d. est la bonne réponse.

En effet, comme la courbe Cf semble toujours être au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle [-5 ; 5], la fonction f semble convexe sur [-5 ; 5].

Ainsi: comme f semble convexe sur [-5 ; 5], nous retiendrons la réponse **d**.

3. b. est la bonne réponse.

En effet, en comptant de manière très approximative le nombre de grands carreaux, il semble que: $4 \leqslant I \leqslant 7$.

D'où: la réponse **b**.

Partie B:

1. a. Montrons que $f'(x) = 0,2x\,e^{0,2x}$:

Ici: • $f(x) = (x - 5)\,e^{0,2x} + 5$ $\quad (u \times e^{v} + 5)$

• $Df = [-10\,;5]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[-10\,;5]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-10\,;5]$.

Pour tout $x \in [-10\,;5]$:

$f'(x) = (1) \times (e^{0,2x}) + (x - 5) \times (0,2e^{0,2x}) + 0$ $\quad (u' \times e^{v} + u \times v' \times e^{v} + 0)$

$= 0,2x\,e^{0,2x}$.

Au total, pour tout $x \in [-10\,;5]$: $f'(x) = 0,2x\,e^{0,2x}$.

1. b. Dressons le tableau de variation de f sur $[-10\,;5]$:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-10\,;5]$:

• **1er cas**: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $0,2x \leqslant 0$ **cad ssi**: $x \leqslant 0$ **ou** $x \in [-10\,;0]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{0,2x} > 0$)

• **2ème cas**: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $0,2x \geqslant 0$, **cad ssi**: $x \geqslant 0$ **ou** $x \in [0\,;5]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{0,2x} > 0$)

Au total: • f est décroissante sur [- 10 ; 0],

• f est croissante sur [0 ; 5].

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation de f sur [- 10; 5]:

x	- 10		0		5
f'		-	0	+	
f	a	↘	b	↗	c

Avec: • $a = -15\,e^{-2} + 5$,

• $b = 0$,

• $c = 5$.

1. c. Déterminons la valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à Cf au point A (-5 ; f (-5)):

La valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à Cf au point A est: $f'(-5)$.

Or: $f'(-5) = 0,2 \times (-5) \times e^{0,2 \times (-5)}$ **cad**: $f'(-5) = -e^{-1}$.

Ainsi, le coefficient directeur a pour valeur exacte: $-e^{-1}$.

2. a. Justifions que $f''(x) = (0,2 + 0,04x)\,e^{0,2x}$:

Nous savons que pour tout $x \in [-10 ; 5]$: $f'(x) = 0,2x\,e^{0,2x}$. **$(u \times e^{v})$**

Dans ces conditions, pour tout $x \in [-10;5]$:

$$f''(x) = (0,2) \times (e^{0,2x}) + (0,2x) \times (0,2\, e^{0,2x}) \quad (u' \times e^{v} + u \times v' \times e^{v})$$

cad: $f''(x) = (0,2 + 0,04x) \times e^{0,2x}$.

Au total, pour tout $x \in [-10;5]$, nous avons bien: $f''(x) = (0,2 + 0,04x) \times e^{0,2x}$.

2. b. Etudions la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-10;5]$:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [-10;5]$: $f''(x) = (0,2 + 0,04x)\, e^{0,2x}$:

Dans ces conditions: • $f''(x) \leqslant 0$ ssi: $0,2 + 0,04x \leqslant 0$ cad: $x \leqslant -5$,

• $f''(x) \geqslant 0$ ssi: $0,2 + 0,04x \geqslant 0$ cad: $x \geqslant -5$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{0,2x} > 0$)

Ainsi: • f est concave sur $I = [-10;-5]$,

• f est convexe sur $I' = [-5;5]$.

3. a. Déterminons la valeur exacte de I définie par $I = \int_0^5 f(x)\, dx$:

Ici: $I = \int_0^5 f(x)\, dx$.

D'où: $I = [F(x)]_0^5$

$= [(5x - 50) e^{0,2x} + 5x]_0^5$

$= ((25 - 50) \times e^1 + 25) - (-50 \times e^0 + 0)$

$= 75 - 25e$

$\approx 7,043.$

Ainsi: • une valeur exacte de I est **$75 - 25e$,**

• une valeur approchée de I est **$7,043$**.

3. b. Montrons que l'aire demandée vaut $12,5$ unités d'aire:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan sous la droite $\mathcal{D}$, au-dessus de l'axe des abscisses et limité par la droite d'équation $x = 5$ correspond à:

$$\mathcal{A} = \int_0^5 f(x)\, dx.$$

La fonction $h(x) = x$ est continue sur $[0; 5]$; elle admet donc des primitives sur $[0; 5]$ et par conséquent: $\mathcal{A}$ existe.

$$\mathcal{A} = \int_0^5 x\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5$$

$$= \frac{25}{2} \text{ u.a.}$$

Au total, l'aire demandée $\mathcal{A}$ est bien égale à: $\mathcal{A} = 12,5$ **u.a.**

3. c. Déduisons-en une valeur approchée de l'aire du domaine S en unités d'aire:

Une valeur approchée de S en unités d'aire est:

$$S = \mathcal{A} - I$$

$$\iff S \approx 12,5 - (7,043) \quad \text{cad:} \quad S \approx 5,46 \text{ u.a.}$$

Au total, une valeur approchée de S est: $S \approx 5,46$ **u.a**.