Spé Maths
Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

11

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $]0; 1]$:

Ici: $f(x) = \frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{x^4}\right)$, pour tout $x \in]0; 1]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $]0; 1]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0; 1]$:

$$f'(x) = \frac{1}{20}\left(1 + \frac{4}{x^5}\right).$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; 1]$: $f'(x) = \frac{1}{20}\left(1 + \frac{4}{x^5}\right)$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Sur $]0; 1]$: $f'(x) > 0$ car $\frac{4}{x^5} > 0$.

Ainsi: f est strictement croissante sur $]0; 1]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		1
f'	||	$+$	
f	|| a	$\nearrow$	b

Avec: • $a = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$,

• $b = f(1) = 0$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = -5$ admet une unique solution α sur $]0; 1]$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $]0; 1]$.

• " $k = -5$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

et: $f(1) = 0$.

- f est strictement croissante sur $]\,0\,;\,1\,]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = -5$ ($k = -5$) admet bien une unique solution α appartenant à $]\,0\,;\,1\,]$.