Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 15

CORRECTION

1. Déterminons la hauteur de la plante en mars 2016:

$$\underset{\text{taille initiale}}{80\text{ cm}} - \underset{\text{quart de la hauteur}}{20\text{ cm}} + \underset{\text{pousse naturelle}}{30\text{ cm}} = 90\text{ cm}.$$

2. a. Justifions que, pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0,75\,h_n + 30$:

- D'après l'énoncé, en mars 2015, la plante mesure 80 cm.

D'où: $h_0 = 80$ cm.

- De plus, chaque année Max coupe un quart de la hauteur de la plante, soit 25%, et cette dernière pousse de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Soient:
- h_{n+1}, la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars (2015 + (n + 1)),
- h_n, la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars (2015 + (n)).

Pour tout entier naturel n, la hauteur de la plante " h_{n+1} " est égale à sa hauteur " h_n " diminuée de 25% et augmentée de 30 cm.

Donc pour tout entier naturel n:

$h_{n+1} = h_n - 25\%\, h_n + 30 \Rightarrow h_{n+1} = 0,75 \times h_n + 30.$

2. b. Montrons par récurrence que la suite (h_n) est strictement croissante:

Les calculs faits au brouillon permettent d'affirmer que, a priori, la suite (h_n) est strictement croissante.

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $h_{n+1} > h_n$ ".

Initialisation: • $h_1 = 90 > h_0 = 80$.

Donc vrai au rang " 1 ".

• $h_2 = 0,75 \times 90 + 30 > h_1 = 90$.

Donc vrai au rang " 2 ".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n, $h_{n+1} > h_n$ et montrons qu'alors: $h_{n+2} > h_{n+1}$.

Supposons: $h_{n+1} \geqslant h_n$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) => $0,75\ h_{n+1} > 0,75\ h_n$

=> $0,75\ h_{n+1} + 30 > 0,75\ h_n + 30$

=> $h_{n+2} > h_{n+1}$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $h_{n+1} > h_n$, ce qui revient à dire que la suite (h_n) est bien strictement croissante.

2. c. La suite (h_n) est-elle convergente ?

Nous savons que:

• $U_{n+1} = a\ U_n + b$

- $\lim_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{b}{1 - a}$.

Or ici: $h_{n+1} = 0,75\, h_n + 30$.

Par identification, nous pouvons poser:

$$a = 0,75 \text{ et } b = 30.$$

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} h_n = \frac{30}{1 - 0,75} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} h_n = 120.$$

Donc oui la suite (h_n) est convergente et converge vers 120 cm.

Cela signifie qu'au bout de " n " années (" n " très grand), la hauteur de la plante tendra vers 120 cm.