

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Récurrance, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. (U_n) est-elle décroissante à la vue des résultats ?

Le tableau nous indique que:

$$\begin{cases} U_0 > U_1 > U_2 > U_3 & (5 > 1 > -0,5 > -0,75) \\ U_4 > U_3 & (-0,375 > -0,75). \end{cases}$$

Ainsi, nous ne pouvons rien affirmer du tout sur la décroissance éventuelle de (U_n) .

2. Démontrons que $\forall n \geq 3, U_{n+1} > U_n$:

Nous allons montrer par récurrence que:

$$" \forall n \geq 3, U_{n+1} > U_n "$$

Initialisation:

- $U_4 = -0,375 > U_3 = -0,75,$
- $U_5 = 0,5 \times (-0,375) + 0,5 \times 4 - 1,5$
 $= 0,3125 > U_4 = -0,375.$

Hérédité: Supposons que $\forall n \geq 3, n$ étant un entier naturel, $U_{n+1} > U_n$ et montrons qu'alors: $U_{n+2} > U_{n+1}$.

Supposons: $U_{n+1} > U_n$, pour un entier naturel $n \geq 3$ fixé.
 (1)

$$\begin{aligned}
(1) &\Rightarrow 0,5 U_{n+1} > 0,5 U_n \\
&\Rightarrow 0,5 U_{n+1} - 1,5 > 0,5 U_n - 1,5 \\
&\Rightarrow 0,5 U_{n+1} - 1,5 + 0,5 n > 0,5 U_n - 1,5 + 0,5 n \\
&\Rightarrow 0,5 U_{n+1} - 1,5 + 0,5 n + 0,5 > U_{n+1} \\
&\Rightarrow 0,5 U_{n+1} + 0,5 (n+1) - 1,5 > U_{n+1} \\
&\Rightarrow U_{n+2} > U_{n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion: Pour tout entier n supérieur à 3, nous avons:

$$U_{n+1} > U_n.$$

Par conséquent, la suite (U_n) est: strictement croissante.

3. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et exprimons V_n en fonction de n :

$$V_n = 0,1 U_n - 0,1n + 0,5 \iff V_{n+1} = 0,1 U_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5.$$

$$\text{D'où: } V_{n+1} = 0,1(0,5 U_n + 0,5n - 1,5) - 0,1(n+1) + 0,5.$$

$$\text{Or: } V_0 = 0,1 \times U_0 - 0,1 \times 0 + 0,5 \Rightarrow V_0 = 1.$$

$$\text{De plus: } U_n = 10 \times (V_n + 0,1n - 0,5). \Rightarrow U_n = V_n + n + 5.$$

$$\text{Ainsi: } V_{n+1} = 0,1(0,5 [10V_n + n - 5] + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4$$

$$\iff V_{n+1} = 0,5 \times V_n + 0,1(n-4) - 0,1n + 0,4$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 0,5 \times V_n.$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $V_0 = 1$.

Ainsi, d'après le cours, nous pouvons écrire:

$$V_n = V_0 \times (0,5)^n \quad \text{cad:} \quad V_n = (0,5)^n.$$

4. Dédisons-en que, pour tout entier n , $U_n = 10 \times (0,5)^n + n - 5$:

Nous savons que: * $V_n = (0,5)^n$

* $U_n = 10(V_n + 0,1n - 0,5)$.

D'où: $U_n = 10 \times (0,5)^n + n - 5$.

5. Déterminons la limite de la suite (U_n) :

Comme $0,5 \in]0;1[$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5)^n = 0$.

Dans ces conditions:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 5)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty.$$

En conclusion: (U_n) est une suite divergente.