

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Montrons qu'il existe 2 points invariants et donnons l'affixe de ces 2 points sous forme exponentielle:

1. a. Sous forme algébrique ?

Un point M d'affixe z ($z \neq 0$) est invariant ssi: $z' = z$.

$$z' = z \Leftrightarrow z^2 + 4z + 3 = z \Leftrightarrow z^2 + 3z + 3 = 0.$$

Soit l'équation: $z^2 + 3z + 3 = 0$.

$$\Delta = -3 \Rightarrow \Delta = (\sqrt{3}i)^2.$$

D'où 2 solutions dans \mathbb{C} :

- $z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

- $z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Au total, sous forme algébrique, les 2 solutions sont:

$$z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

1. b. Sous forme exponentielle ?

• Le module de z_1 est: $|z_1| = \sqrt{3}$.

• Soit θ , l'argument de z_1 : $z_1 = \sqrt{3} (\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)$.

Par identification:
$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{cad } \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Sous forme exponentielle z_1 s'écrit: $z_1 = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

• Le module de z_2 est: $|z_2| = \sqrt{3}$.

• Soit θ , l'argument de z_2 : $z_2 = \sqrt{3} (\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$.

Par identification:
$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{cad } \theta = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Sous forme exponentielle z_2 s'écrit: $z_2 = \sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Au total, sous forme exponentielle, les 2 solutions s'écrivent:

$$z_1 = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

2. Montrons que OAB est un triangle équilatéral:

OAB est un triangle équilatéral ssi: $OA = OB = AB$.

Or:

- $OA = |z_1| \Rightarrow OA = \sqrt{3}$,
- $OB = |z_2| \Rightarrow OB = \sqrt{3}$,
- $AB = |z_2 - z_1| \Rightarrow AB = \sqrt{3}$.

Au total, comme $OA = OB = AB$: le triangle OAB est bien un triangle équilatéral.

3. Déterminons l'ensemble \mathcal{E} :

Soit M' (z') avec: $z' = x' + iy'$.

M' est sur l'axe des réels ssi: $y' = 0$.

Or: $z' = z^2 + 4z + 3$, avec: $z = x + iy$.

D'où: $z' = (x^2 - y^2 + 4x + 3) + i(2xy + 4y)$.

Ainsi: M' est sur l'axe des réels ssi:

$$2xy + 4y = 0 \text{ cad } y = 0 \text{ ou } x = -2.$$

Au total, l'ensemble \mathcal{E} correspond à l'axe des abscisses ($y = 0$) avec les points de la droite d'équation $x = -2$.

4. Représentation graphique:

Dans le plan complexe, les points A et B ainsi que l'ensemble \mathcal{E} sont représentés sur le graphique suivant:

