Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ON S'AMUSE ! 3

CORRECTION

1. a. Justifions que l'équation (E) admet deux solutions complexes non réelles:

L'équation (E) est: $z^2 - 6z + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $c > 9$.

$\Delta = 36 - 4c < 0$ car: $c > 9$.

Ainsi, comme $\Delta < 0$: l'équation (E) admet bien deux solutions complexes non réelles conjuguées z_A et z_B.

1. b. Déterminons les deux solutions de l'équation (E):

$\Delta = 36 - 4c < 0$, d'où 2 solutions dans $\mathbb{C}$:

- $$z_A = \frac{6 + i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (\text{car: } \Delta = i^2 \times (-\Delta))$$

$$= \frac{6 + i\sqrt{4c - 36}}{2}$$

$$= \frac{6 + i\sqrt{2^2(c - 9)}}{2}$$

$$= \frac{6 + 2i\sqrt{c - 9}}{2}$$

$\Rightarrow z_A = 3 + i\sqrt{c - 9}$,

- $$z_B = \frac{6 - i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (\text{car: } \Delta = i^2 \times (-\Delta))$$

$\Rightarrow z_B = 3 - i\sqrt{c - 9}$.

Au total, les deux solutions complexes non réelles conjuguées, de l'équation (E) sont bien: $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

2. Justifions que le triangle OAB est isocèle en O:

Soient les points: $O(z_0)$, $A(z_A)$ et $B(z_B)$,

avec: $z_0 = 0$, $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

OAB est un triangle isocèle en O ssi: $OA = OB$.

Or: • $OA = |z_A - z_0|$ <=> $OA = |3 + i\sqrt{c-9}|$ => $OA = \sqrt{c}$,

• $OB = |z_B - z_0|$ <=> $OB = |3 - i\sqrt{c-9}|$ => $OB = \sqrt{c}$.

Au total, comme $OA = OB$: le triangle OAB est bien isocèle en O.

3. Déterminons la valeur réelle de " c " telle que le triangle OAB soit rectangle en O:

Le triangle OAB est rectangle en O ssi: $\dfrac{z_B - z_0}{z_A - z_0}$ est un imaginaire pur.

(d'après le cours)

Ici: • $z_B - z_0 = 3 - i\sqrt{c-9}$,

• $z_A - z_0 = 3 + i\sqrt{c-9}$.

D'où: $$\frac{z_B - z_0}{z_A - z_0} = \frac{3 - i\sqrt{c-9}}{3 + i\sqrt{c-9}}$$

$$= \frac{(3 - i\sqrt{c-9}) \times (3 - i\sqrt{c-9})}{(3 + i\sqrt{c-9}) \times (3 - i\sqrt{c-9})}$$

$$= \frac{9 + i^2(c-9) - 6i\sqrt{c-9}}{3^2 + c - 9}$$

$$= \frac{18 - c}{c} - \frac{6\,i\sqrt{c-9}}{c}.$$

Dans ces conditions, $\frac{z_B - z_0}{z_A - z_0}$ est un imaginaire pur ssi:

$$\frac{18 - c}{c} = 0 \quad \text{cad:} \quad c = 18.$$

Au total, le triangle OAB est rectangle en O ssi: $c = 18 > 9$.