Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉQUATION DU TYPE : $z^2 = 1 - \sqrt{3}i$

1

CORRECTION

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 = 1 - \sqrt{3}i$.

Il s'agit ici de déterminer z tel que: $z^2 = 1 - \sqrt{3}i$.

- Sous forme trigonométrique: $z = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$.

  (r_1 étant son module et θ_1 son argument)

- De plus:
  - le module de $1 - \sqrt{3}i$ est $r_2 = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$ cad $r_2 = 2$,
  - l'argument de $1 - \sqrt{3}i$ est $\theta_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

  (car θ_2 est tel que: $\cos\theta_2 = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)

- Dans ces conditions, nous devons déterminer r_1 et θ_1:

$$z^2 = 1 - \sqrt{3}i \iff [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)]^2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\iff [r_1^2(\cos(2\theta_1) + i\sin(2\theta_1)] = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1^2 = 2 \\ 2\theta_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{2} \\ \theta_1 = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

En définitive les deux solutions de l'équation sont:

- $z' = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (on prend $k = 0$)
- $z'' = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ (on prend $k = 1$).