Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ 2

CORRECTION

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i = 0$.

Soit l'équation: $z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i = 0$ $(az^2 + bz + c = 0)$.

Calculons: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ici: $a = 1$, $b = -(1+3i)$ et $c = -6 + 9i$.

D'où: $\Delta = 16 - 30i$.

Nous devons donc trouver un nombre complexe $\alpha = a + ib$ tel que $\alpha^2 = \Delta$.

Nous avons:
- $\alpha^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i\,(2ab)$,
- $\Delta = 16 - 30i$.

- D'où: $\alpha^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 16 \\ 2ab = -30 \end{cases}$.

- De plus, comme $\alpha^2 = \Delta$: $|\alpha|^2 = |\Delta|$ cad $a^2 + b^2 = 34$.

Par conséquent, nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 16 \\ a^2 + b^2 = 34 \\ 2ab = -30 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 16 \\ a^2 + b^2 = 34 \\ ab = -15 \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} a^2 - b^2 = 16 \\ a^2 + b^2 = 34 \quad (I). \\ ab < 0 \quad (i) \end{cases}$$

Du système (I), nous déduisons: $2a^2 = 50$ **cad** $a^2 = 25$ **cad** $a = 5$ ou $a = -5$.

Dans ces conditions: $b = 3$ ou $b = -3$.

Notons que l'inégalité **(i)** nous permet d'affirmer que a et b sont de signes opposés.

Ainsi: $\alpha' = 5 - 3i$ et $\alpha'' = -5 + 3i$.

Prenons α' (nous aurions pu prendre aussi α'').

Nous avons donc:

- $z_1 = \dfrac{-b - \alpha'}{2a}$
- $z_2 = \dfrac{-b + \alpha'}{2a}$.

En conclusion, les deux solutions sont:

- $z_1 = \dfrac{(1 + 3i) - (5 - 3i)}{2}$
- $z_2 = \dfrac{(1 + 3i) + (5 - 3i)}{2}$

cad

- $z_1 = -2 + 3i$
- $z_2 = 3$