

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes

## Terminale

# Matrices



**MINI COURS**

## A. Définition d'une matrice :

Soient  $n$  et  $p$  deux nombres entiers naturels non nuls.

Une matrice  $M_{(n,p)}$  est un tableau de nombres réels à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

## B. Vocabulaire :

1. Quand  $n = p$  :  $M$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ .

Exemple avec  $n = p = 2$  :  $M_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

\*\*\*

2. Quand  $n = 1$  :  $M$  est une matrice ligne.

Exemple avec  $p = 3$  :  $M_{(1,3)} = (3 \ 6 \ 9)$ .

\*\*\*

3. Quand  $p = 1$  :  $M$  est une matrice colonne.

Exemple avec  $n = 4$  :  $M_{(4,1)} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$ .

## C. La matrice nulle:

Exemples: •  $\mathbf{M}_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

•  $\mathbf{M}_{(1,4)} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$

•  $\mathbf{M}_{(6,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## D. La matrice identité $\mathbf{I}_2$ ou $\mathbf{I}_3$ :

### 1. Ecriture:

•  $\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

•  $\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### 2. Propriétés:

•  $\mathbf{I}_2 \times \mathbf{M} = \mathbf{M} \times \mathbf{I}_2 = \mathbf{M}$ .

•  $\mathbf{I}_3 \times \mathbf{M} = \mathbf{M} \times \mathbf{I}_3 = \mathbf{M}$ .

## E. Opérations sur les matrices :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ , deux matrices de même dimension.

### 1. L'addition :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

### 2. La soustraction :

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

### 3. Le produit d'une matrice par un réel $k$ :

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot 1 & k \cdot 2 \\ k \cdot 3 & k \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2k \\ 3k & 4k \end{pmatrix}.$$

### 4. La multiplication :

#### a. Remarques :

- La multiplication entre 2 matrices est possible ssi le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde matrice:

$$A_{(n,p)} \times B_{(p,z)} = C_{(n,z)}.$$

- $A \times B \neq B \times A$ .

**b. Exemples :**

$$\begin{aligned}
 \bullet \mathbf{A}_{(2,2)} \times \mathbf{B}_{(2,2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

• Soient **C** et **D** deux matrices carrées d'ordre 3 :

$$\bullet \mathbf{C}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{D}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \mathbf{C}_{(3,3)} \times \mathbf{D}_{(3,3)} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \times 10 + 2 \times 13 + 3 \times 16 & 1 \times 11 + 2 \times 14 + 3 \times 17 & 1 \times 12 + 2 \times 15 + 3 \times 18 \\ 4 \times 10 + 5 \times 13 + 6 \times 16 & 4 \times 11 + 5 \times 14 + 6 \times 17 & 4 \times 12 + 5 \times 15 + 6 \times 18 \\ 7 \times 10 + 8 \times 13 + 9 \times 16 & 7 \times 11 + 8 \times 14 + 9 \times 17 & 7 \times 12 + 8 \times 15 + 9 \times 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 84 & 90 & 96 \\ 201 & 216 & 231 \\ 318 & 342 & 366 \end{pmatrix}.$$

## F. Matrice inverse d'une matrice carrée :

### 1. Définition :

Une matrice carrée **A** d'ordre **n** est inversible s'il existe une matrice **B**

telle que:  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ .

(**I** = matrice identité)

### 2. Notation :

La matrice **B** s'appelle matrice inverse de **A** et se note:  $\mathbf{A}^{-1}$ .

### 3. Propriété :

Soit le système linéaire (**S**) de **n** équations à **n** inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Soit:  $\bullet \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix},$

$$\bullet C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Si  $A$  est inversible, les solutions du système s'obtiennent en calculant les éléments de  $X$ :  $AX = C \Leftrightarrow X = A^{-1}C$ .

## G. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 :

### 1. Formule :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

### 2. Condition d'inversibilité de $A$ :

$A$  est inversible ssi :  $\det A \neq 0$ .

### 3. $A^{-1}$ ?

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

## H. Diagonalisation :

## 1. Définition :

Une matrice carrée **A** est diagonalisable s'il existe une matrice **P** inversible et une matrice **D** diagonale telles que :  $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$ .

## 2. Conséquence :

Pour tout entier naturel  $n$  :  $\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \mathbf{D}^n \mathbf{P}^{-1}$ .