Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE SOCIÉTÉ D'AUTOROUTE

CORRECTION

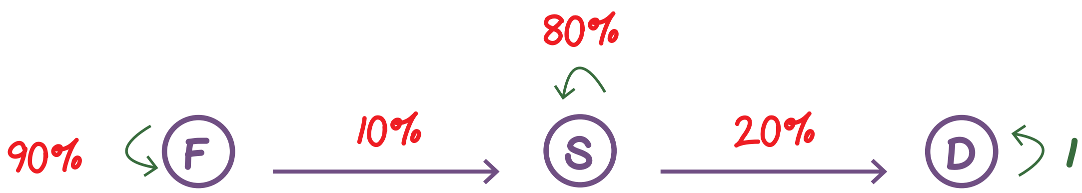
1. a. Recopions et complétons le graphe probabiliste:

Soient: • F, l'état: " Fonctionnel ",

• S, l'état: " Sursis ",

• D, l'état: " Défaillant ".

Le graphe probabiliste G complété est le suivant:



1. b. Interprétons le nombre 1 qui apparaît sur le graphe:

Le nombre 1 signifie que: **100% des automates " défaillants " le reste.**

1. c. Précisons la signification du coefficient " 0, 2 " de la matrice M:

Soit $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice de transition.

Le coefficient " **0, 2** " signifie que: 20% des automates qui sont en " sursis " deviennent " défaillants ".

2. a. Calculons P_1:

Il s'agit ici de calculer: $P_1 = (f_1 \quad s_1 \quad d_1)$.

D'après le cours: $P_1 = P_0 \times M^1$, M étant la matrice de transition.

Or: $P_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$.

D'où: $P_1 = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= (0,9 \quad 0,1 \quad 0)$.

Donc: $f_1 = 90\%$, $s_1 = 10\%$ et $d_1 = 0$.

Au total: $P_1 = (90\% \quad 10\% \quad 0)$.

2. b. Montrons que $P_3 = (0,729 \quad 0,217 \quad 0,054)$:

Il s'agit ici de calculer: $P_3 = (f_3 \quad s_3 \quad d_3)$.

D'après le cours: $P_3 = P_0 \times M^{(3-0)}$ **ou**: $P_3 = P_1 \times M^{(3-1)}$.

$P_3 = P_1 \times M^{(3-1)}$

$= P_1 \times M^2$

$= (0,9 \quad 0,1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$

$= (0,729 \quad 0,217 \quad 0,054)$.

Donc: $f_3 = 72,9\%$, $s_3 = 21,7\%$ et $d_3 = 5,4\%$.

Au total, le 3e jour, l'état probabiliste est bien: $(0,729 \quad 0,217 \quad 0,054)$.

2. c. c1. Vérifions que $P = (0 \quad 0 \quad 1)$ est l'unique état stable du graphe:

Soit P l'état stable de ce graphe.

P vérifie: $P = P \times M$, car l'état stable P est l'unique solution de l'équation

$$P = P \times M.$$

Posons: $P = (0 \quad 0 \quad 1)$. $(0 + 0 + 1 = 1)$

$$P \times M = (0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \times 0,9 + 0 \times 0 + 1 \times 0 \quad 0 \times 0,1 + 0 \times 0,8 + 1 \times 0 \quad 0 \times 0 + 0 \times 0,2 + 1 \times 1)$$

$$= (0 \quad 0 \quad 1)$$

$$= P.$$

Ainsi, nous avons: $P \times M = P$, avec: $P = (0 \quad 0 \quad 1)$.

Donc: $P = (0 \quad 0 \quad 1)$ correspond bien à l'unique état stable du graphe.

2. c. c2. Précisons la signification de ce résultat pour la situation étudiée:

L'état stable P nous indique, au bout de n jours (" n très grand "), l'état des automates de la société d'autoroute en l'absence de maintenance.

Comme ici: $P = (0 \quad 0 \quad 1)$, nous pouvons affirmer qu'à long terme 100% des automates seront " défaillants ", en l'absence de maintenance.

3. a. Justifions que pour tout entier naturel n, $s_{n+1} = 0,1 f_n + 0,8 s_n$:

D'après le cours, nous savons que, pour tout entier naturel n, P_{n+1} en fonction de P_n s'écrit: $P_{n+1} = P_n \times M$.

$$P_{n+1} = P_n \times M \iff (f_{n+1} \quad s_{n+1} \quad d_{n+1}) = (f_n \quad s_n \quad d_n)\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff (f_{n+1} \quad s_{n+1} \quad d_{n+1}) = (0,9f_n \quad 0,1f_n + 0,8s_n \quad 0,2s_n + d_n)$$

$$\iff \begin{cases} f_{n+1} = 0,9\, f_n \\ s_{n+1} = 0,1\, f_n + 0,8\, s_n \\ d_{n+1} = 0,2\, s_n + d_n \end{cases}$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $s_{n+1} = 0,1\, f_n + 0,8\, s_n$.

3. b. Complétons l'algorithme:

L'algorithme complété est le suivant:

```
D ← 0
S ← 0
F ← 1
N ← 0
Tant que D ≤ 0,30
    D ← 0,2 x S + D
    S ← 0,1 x F + 0,8 x S
    F ← 0,9 x F
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

3. c. Déterminons au bout de combien de jours la proportion d'automates défaillants devient supérieure à 30%:

Après avoir dressé un tableau allant de $N = 0$ à $N = 8$, pour les valeurs de D, S et F, nous trouvons à l'aide d'une machine à calculer que:

dès que $N = 8$: $D > 30\%$.

Ainsi: au bout de **8 jours**, la proportion d'automates défaillants deviendra, pour la première fois, strictement supérieure à 30%.

3. d. L'ordre d'affectation des variables D, S et F est-il important ?

Oui: si on change l'ordre d'affectation des variables D, S et F, tout change!