Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UN CENTRE DE VACANCES

CORRECTION

Partie A:

1. **Peut-on nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles ?**

Cela revient à déterminer si le graphe admet une chaîne eulérienne.

Ici, le graphe G (**d'ordre 7**) est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

De plus d'après le cours:

G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Deux sommets (et deux seulement) X et Y de G sont de degré impair.
- G admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.

Ici, le tableau des sommets degrés est le suivant:

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	2	4	3	2	4	3	2

Il y a donc 2 sommets C et F de degré impair.

Par conséquent: le graphe admet une chaîne eulérienne.

Ainsi, d'après le théorème d'**Euler**: **oui**, il est possible de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles.

2. Existe-t-il un tel parcours ?

Ce parcours existe ssi nous sommes en présence d'un cycle eulérien.

Or, d'après le cours: **un cycle eulérien** est une chaîne eulérienne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.

Comme ici il y a 2 sommets C et F de degré impair, nous ne sommes pas en présence d'un cycle eulérien qui nécessite que tous les sommets soient de degré pair.

Au total: un tel parcours n'existe pas.

3. Déterminons le trajet le plus court pour aller de A à G:

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet le plus court (minimisation de la distance) pour aller de A à G:

le trajet A - B - E - G.

Et ce trajet aura pour distance: $75 + 42 + 93 = 210$ mètres.

Au total, le trajet le plus court pour aller de A à G est:

A - B - E - G, et il aura pour longueur 210 mètres.

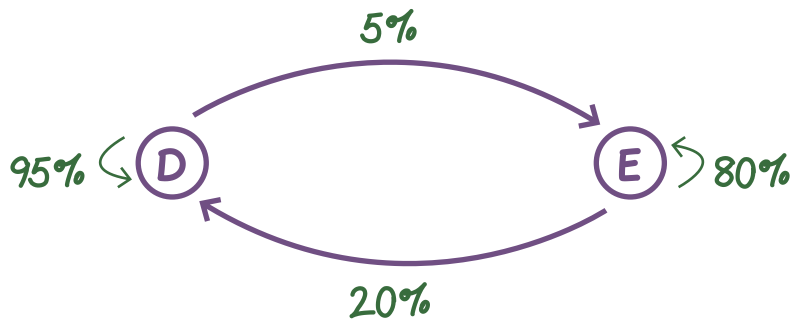
Partie B:

1. Construisons un graphe modélisant la situation:

Soient: • D, l'état: " Déjeuner au centre de vacances ",

• E, l'état: " Déjeuner à l'extérieur ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Ecrivons la matrice M associée à ce graphe:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix}.$$

3. a. Déterminons le pourcentage qui déjeunera au centre des vacances le second jour:

Cela revient à calculer P_2.

D'après le cours: $P_2 = P_1 \times M^{(2-1)}$ cad $P_2 = P_1 \times M$.

Or: $P_1 = (25\% \quad 75\%)$ car " **Le premier jour, le quart des vacanciers a déjeuné au centre de vacances** ".

Ainsi: $P_2 = (25\% \quad 75\%) \begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix}$ => $P_2 = (38,75\% \quad 61,25\%)$.

Au total: 38, 75% des vacanciers déjeunera au centre de vacances le second jour.

3. b. Déterminons le pourcentage qui déjeunera au centre de vacances le cinquième jour:

Cela revient à déterminer " x ", avec x tel que: $P_5 = (x \quad y)$.

D'après le cours: $P_5 = P_4 \times M^{(5-4)}$ <=> $P_5 = P_4 \times M^1$

$$<=> P_5 = (P_3 \times M) \times M$$

$$<=> P_5 = P_3 \times M^2$$

$$<=> P_5 = (P_2 \times M) \times M^2$$

$$<=> P_5 = P_2 \times M^3$$

$$<=> P_5 = (P_1 \times M) \times M^3$$

$$=> P_5 = P_1 \times M^4.$$

A l'aide d'une calculatrice, nous obtenons: $P_5 \approx (62,6\% \quad 37,4\%)$.

Ainsi: environ $x = 62,6\%$ des vacanciers déjeunera au centre de vacances le $5^{ème}$ jour.

4. Déterminons si l'état $(0,5 \quad 0,5)$ est stable:

Soit P l'état stable de ce graphe.

P vérifie: $P = P \times M$, car l'état stable P est l'unique solution de l'équation

$$P = P \times M.$$

Posons: $X = (0,5 \quad 0,5)$.

$$X \times M = (0,5 \quad 0,5)\begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix} => X \times M = (57,5\% \quad 42,5\%).$$

Comme: $X \times M \neq X$, l'état $(0,5 \quad 0,5)$ n'est pas stable.

5. A terme, 75% des vacanciers prendront-ils leur déjeuner au centre ?

A long terme, l'état P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial P_0.

Or l'état stable P indique, entre autre, au bout de n années (" n très grand ") le pourcentage de vacanciers qui prendront leur déjeuner au centre.

Nous allons donc déterminer $P = (x \quad y)$ et comparer x à 75%.

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

Soit $P = (x \quad y)$, $P = P \times M \iff (x \quad y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 20\% & 80\% \end{pmatrix}$

$$\iff (x \quad y) = (0,95x + 0,2y \quad 0,05x + 0,8y)$$

$$\iff \begin{cases} 0,95x + 0,2y = x \\ 0,05x + 0,8y = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -0,05x + 0,2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0,8 \\ y = 0,2 \end{cases}, \text{ et donc: } P = (80\% \quad 20\%).$$

Comme $x = 0,8$, à long terme, 80% des vacanciers prendront leur déjeuner au centre.

Comme: $80\% \neq 75\%$, la réponse est **non**.