Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SUITE D'ÉNIGMES

CORRECTION

Partie A:

1. Donnons la matrice P_1:

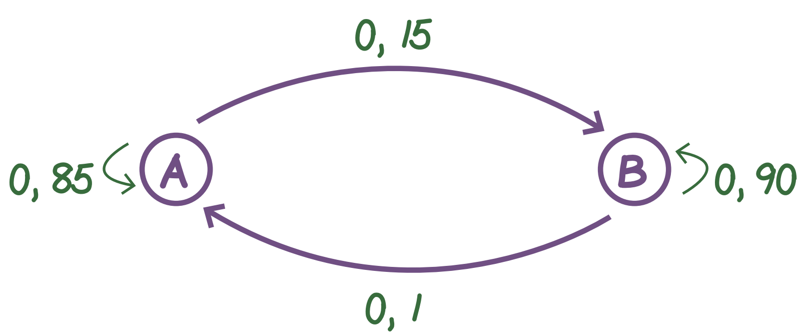
L'état probabiliste pour l'énigme numéro 1 est: $P_1 = (a_1 \quad b_1)$ cad $P_1 = (1 \quad 0)$.

Ainsi: $P_1 = (1 \quad 0)$.

2. Traduisons les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B:

Soient:
- A, l'état: " l'énigme est facile ",
- B, l'état: " l'énigme est difficile ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



3. a. Ecrivons la matrice M associée à ce graphe:

La matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,90 \end{pmatrix}.$$

3. b. Déterminons P_2:

D'après le cours: $P_2 = P_1 \times M^{(2-1)}$ cad $P_2 = P_1 \times M$.

$$P_2 = P_1 \times M \iff P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,90 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

D'où: $a_2 = 0,85$ et $b_2 = 0,15$.

Au total: $P_2 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$.

4. Montrons que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,75\, a_n + 0,1$:

D'après le cours, nous savons que, pour tout entier $n \geqslant 1$, P_{n+1} en fonction de P_n s'écrit: $P_{n+1} = P_n \times M$.

$$P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,90 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85a_n + 0,1b_n & 0,15a_n + 0,90b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 0,85a_n + 0,1b_n. \quad (a)$$

Or, d'après l'énoncé: $a_n + b_n = 1$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Dans ces conditions: $(a) \iff a_{n+1} = 0,85a_n + 0,1(1 - a_n)$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 0,75a_n + 0,1.$$

Au total, pour tout entier $n \geqslant 1$: $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,1$.

5. a. Montrons que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison:

$V_n = a_n - 0,4 \iff V_{n+1} = a_{n+1} - 0,4$, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\iff V_{n+1} = (0,75\,a_n + 0,1) - 0,4 \quad (1).$$

Or: $V_1 = a_1 - 0,4 \Rightarrow V_1 = 0,6$ et $a_n = V_n + 0,4$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,75\,[V_n + 0,4] + 0,1) - 0,4$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,75\,V_n$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $V_1 = 0,6$.

5. b. b1. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,75\,V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_1 \times (0,75)^{n-1}, \quad \text{avec:} \quad V_1 = 0,6.$$

En d'autres termes: $V_n = 0,6 \times (0,75)^{n-1}$, pour tout $n \geqslant 1$.

5. b. b2. Montrons que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = 0,8 \times (0,75)^n + 0,4$:

Nous savons que: * $V_n = 0,6 \times (0,75)^{n-1}$

* $a_n = V_n + 0,4$.

D'où: $a_n = 0,6 \times (0,75)^{n-1} + 0,4$ cad: $a_n = \dfrac{0,6}{0,75} \times (0,75)^n + 0,4$.

Au total, nous avons bien pour tout entier $n \geqslant 1$: $a_n = 0,8 \times (0,75)^n + 0,4$.

5. c. Précisons la limite de la suite (V_n):

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} 0,6 \times (0,75)^{n-1}$$

$$= 0 \quad \text{car:} \quad \lim_{n \to +\infty} (0,75)^{n-1} = 0, \quad \text{car:} \quad 0,75 \in]0,1[.$$

Donc la suite (V_n) est convergente et converge vers " 0 ".

5. d. Que pensons-nous de cette analyse ?

Nous savons que: $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ (question précédente).

Dans ces conditions: • $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,4$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0,6$, car: $a_n + b_n = 1$.

Ainsi: plus le joueur évolue dans le jeu ($n \to +\infty$), plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles (**60% de chance**).

Donc: **oui**, cette analyse nous semble bonne.

Partie B:

Déterminons le chemin que doit prendre le joueur pour aller de A à G, tout en minimisant son temps de parcours:

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet le plus rapide (minimisation du temps de parcours) pour aller de A à G:

le trajet A - B - C - D - E - G.

Et ce trajet durera: $2 + 3 + 4 + 3 + 4 = 16$ minutes.

Au total, le trajet le plus rapide pour aller de A à G est:

A - B - C - D - E - G, et il durera 16 minutes.