Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

QCM

CORRECTION

1. Affirmation A: " L'état stable associé à ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ".

C'est Faux.

Justification:

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation $P = P \times M$.

Or ici, la matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Posons: $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions: $P = P \times M$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \times a + 0,3 \times b & 0,6 \times a + 0,7 \times b \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0,4 \times a + 0,3 \times b \\ b = 0,6 \times a + 0,7 \times b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,6 \times a - 0,3 \times b = 0 \\ a + b = 1 \quad \text{ou} \quad b = 1 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Au total: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable de ce graphe.

2. a. Affirmation B: **" Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe. "**

C'est Vrai.

Justification:

- Ici le graphe est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

- De plus, d'après le cours:

> - G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:
>   - Deux sommets (et deux seulement) X et Y de G sont de degré impair.
>   - G admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.
> - Une chaîne eulérienne est une chaîne qui satisfait:
>   - Elle contient toutes les arêtes du graphe.
>   - Chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.

• Le tableau des sommets degrés est le suivant:

Sommets	A	B	C	D	E	F
Degrés	2	4	3	2	3	4

• Ainsi, il y a 2 sommets C et E de degré impair, et par conséquent:

• Deux sommets C et E de G sont de degré impair

<=> • G admet une chaîne eulérienne d'extrémités C et E

<=> • La chaîne contient toutes les arêtes du graphe

<=> • Chaque arête n'est décrite qu'une seule fois

<=> • Il existe une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe.

2. b. Affirmation C: **" La plus courte chaîne entre les sommets A et D est de poids 5 ".**

C'est Vrai.

Justification:

La chaîne la plus courte entre les sommets A et D est:

A - B - D.

Soit un poids total de: $2 + 2 + 1 = 5$.

3. Affirmation D: **" Il existe exactement 3 chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D ".**

C'est Faux.

Justification:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons:

$$M^4 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Au total, le nombre exact de chaînes de longueur 4 reliant le sommet B au sommet D est: 6. (2^e ligne, 4^e colonne)

4. Affirmation E: **" Il existe un nombre réel " a " pour lequel B est l'inverse de A ".**

C'est Vrai.

Justification:

B est l'inverse de A ssi: $A \times B = B \times A = I_2$.

$$A \times B = I_2 \iff \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -a = 1 \\ a^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1.$$

Au total: quand $a = -1$, la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice A.