

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes Terminale

Graphes, Matrices, Suites



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

# PISCINES PRIVÉES

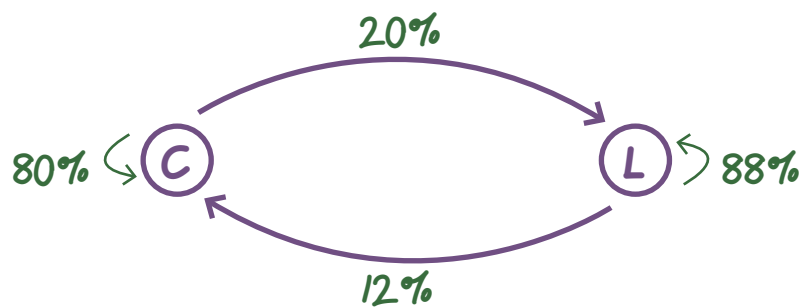
## CORRECTION

### Partie A:

1. Traduisons les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et L:

- Soient:
- C, l'état: " Le particulier est sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus ",
  - L, l'état: " Le particulier effectue lui-même l'entretien de sa piscine ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. a. Montrons que l'état stable de ce graphe est  $P = (0,375 \quad 0,625)$ :

D'après le cours, nous savons que l'état stable  $P$  est l'unique solution de l'équation  $P = P \times M$ .

La matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition  $M$  est:

$$M = \begin{pmatrix} 80\% & 20\% \\ 12\% & 88\% \end{pmatrix}.$$

Posons:  $P = (a \ b)$ .

Dans ces conditions:  $P = P \times M$

$$\Leftrightarrow (a \ b) = (a \ b) \begin{pmatrix} 80\% & 20\% \\ 12\% & 88\% \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (a \ b) = (0,8 \times a + 0,12 \times b \quad 0,2 \times a + 0,88 \times b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,8 \times a + 0,12 \times b \\ b = 0,2 \times a + 0,88 \times b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,2 \times a - 0,12 \times b = 0 \\ 0,2 \times a - 0,12 \times b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,6 \times b \\ a + b = 1 \text{ ou } b = 1 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0,375 \\ b = 1 - a = 0,625 \end{cases}$$

Au total:  $P = (0,375 \quad 0,625)$  correspond à l'état stable de ce graphe.

2. b. Déterminons, en justifiant, si l'entreprise PiscinePlus peut espérer atteindre son objectif:

Rappelons que l'entreprise PiscinePlus atteindra son objectif ssi: "au moins 35% des propriétaires de piscines souscrivent un contrat d'entretien".

De plus, l'état de  $P_n$  à l'étape  $n$  converge vers  $P$  un état stable indépendant de l'état initial  $P_0$ .

Or l'état stable nous indique qu'au bout de  $n$  années ("n très grand"), la probabilité qu'un particulier soit sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus est de: **37,5%**.

Comme  $37,5\% > 35\%$ : oui l'entreprise PiscinePlus peut espérer atteindre son objectif.

## Partie B:

1. Montrons que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$ :

D'après le cours, nous savons que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ :  $P_{n+1} = P_n \times M$ .

$$\text{D'où: } (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0,8a_n + 0,12b_n \quad 0,2a_n + 0,88b_n)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 0,8a_n + 0,12b_n. \quad (a)$$

Or, d'après le cours:  $a_n + b_n = 1$ , pour tout entier naturel  $n$ .

Dans ces conditions:  $(a) \Leftrightarrow a_{n+1} = 0,8a_n + 0,12(1 - a_n)$ , car  $b_n = 1 - a_n$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 0,68a_n + 0,12.$$

Au total, pour tout entier naturel  $n$ , nous avons:  $a_{n+1} = 0,68a_n + 0,12$ .

$$(\text{ou: } c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12)$$

2. a. Recopions et complétons le tableau:

Le tableau complété est le suivant:

Valeur de $n$	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de $C$	0,15	0,222	0,271	0,304	0,327	0,342	0,353

2. b. Donnons la valeur affichée à la fin de l'exécution:

La valeur affichée à la fin de l'exécution est:  $n = 6$ . Cela signifie que l'objectif sera atteint par l'entreprise, 6 ans après 2015 soit en 2021.

3. a. Montrons que la suite  $(V_n)$  est géométrique et déterminons  $V_0$  et  $q$ :

$$\begin{aligned} V_n = c_n - 0,375 &\Leftrightarrow V_{n+1} = c_{n+1} - 0,375 \\ &\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,68c_n + 0,12) - 0,375 \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } V_0 = c_0 - 0,375 \Rightarrow V_0 = -0,225 \text{ et } c_n = V_n + 0,375.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,68[V_n + 0,375] + 0,12) - 0,375 \\ &\Rightarrow V_{n+1} = 0,68V_n. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $(V_n)$  est bien une suite géométrique de raison  $q = 0,68$  et de premier terme  $V_0 = -0,225$ .

3. b. Résolvons l'inéquation  $c_n \geq 0,35$ :

$$\begin{aligned} c_n \geq 0,35 &\Leftrightarrow -0,225 \times 0,68^n + 0,375 \geq 0,35 \\ &\Leftrightarrow -0,225 \times 0,68^n \geq -0,025 \\ &\Leftrightarrow 0,225 \times 0,68^n \leq 0,025 \\ &\Leftrightarrow 0,68^n \leq \frac{1}{9} \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,68) \leq \ln\left(\frac{1}{9}\right) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{\ln(0,68)}, \text{ car: } 0,68 \in ]0, 1[, \text{ et donc: } \ln(0,68) < 0 \\ &\Rightarrow n \geq 5,697 \end{aligned}$$

$\Rightarrow n \geq 6$ , car  $n$  est un entier naturel.

Au total, c'est à partir de " 2015 + 6 ", cad 2021, que l'entreprise PiscinePlus atteindra ses objectifs.

3. c. Quel résultat de la question 2. retrouve-t-on ?

Nous retrouvons le même résultat que celui de la question 2., à savoir que l'entreprise PiscinePlus atteindra ses objectifs à partir de 2021.