Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LES DEUX OPÉRATEURS

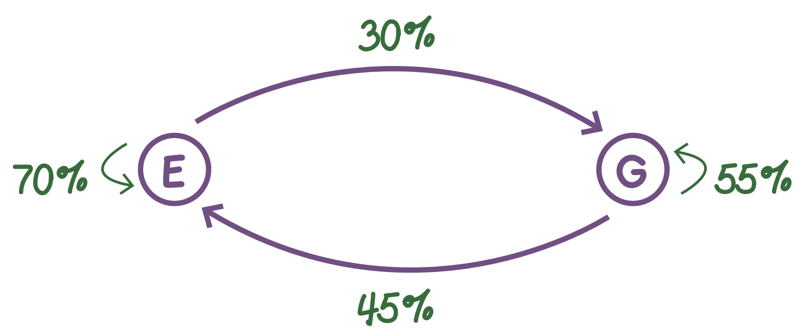
CORRECTION

1. Représentons cette situation par un graphe probabiliste de sommets E et G:

Soient: • E, l'état: " EfficaceRéseau ",

• G, l'état: " GenialPhone ".

Le graphe probabiliste est le suivant:



2. a. Donnons la matrice de transition M:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 45\% & 55\% \end{pmatrix}.$$

2. b. Vérifions qu'au 1er janvier 2020, environ 57% des clients ont un contrat avec EfficaceRéseau:

Il s'agit ici de calculer e_2.

Pour cela nous devons calculer: $P_2 = (e_2 \quad g_2)$.

D'après le cours: $P_2 = P_0 \times M^{(2-0)}$ **cad** $P_2 = P_0 \times M^2$.

Or: $P_0 = (0,1 \quad 0,9)$, **d'après l'énoncé**.

D'où: $P_2 = (0,1 \quad 0,9) \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 45\% & 55\% \end{pmatrix}^2$

$= (0,56875 \quad 0,43125)$.

Donc: $e_2 \approx 57\%$ et $g_2 \approx 43\%$.

Au total, au 1er janvier 2020, la proportion de clients chez EfficaceRéseau sera effectivement d'environ: 57%.

3. a. Exprimons e_{n+1} en fonction de e_n et g_n:

D'après le cours, nous savons que, pour tout entier naturel n, P_{n+1} en fonction de P_n s'écrit: $P_{n+1} = P_n \times M$.

$P_{n+1} = P_n \times M \iff (e_{n+1} \quad g_{n+1}) = (e_n \quad g_n) \begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 45\% & 55\% \end{pmatrix}$

$\iff (e_{n+1} \quad g_{n+1}) = (0,7e_n + 0,45\, g_n \quad 0,3e_n + 0,55\, g_n)$

$\iff e_{n+1} = 0,7e_n + 0,45\, g_n$ **et** $g_{n+1} = 0,3e_n + 0,55\, g_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons: $e_{n+1} = 0,7e_n + 0,45\, g_n$.

3. b. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $e_{n+1} = 0,25\, e_n + 0,45$:

Nous avons: $e_n + g_n = 1$ **ce qui revient à dire que** $g_n = 1 - e_n$.

D'où: $e_{n+1} = 0,7e_n + 0,45\,g_n \iff e_{n+1} = 0,7e_n + 0,45\,(1 - e_n)$

$$\iff e_{n+1} = 0,25e_n + 0,45.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons bien: $e_{n+1} = 0,25e_n + 0,45.$

4. a. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```
E ← 0,1
G ← 0,9

Pour I allant de 1 à N

    | E ← 0,25 x E + 0,45
    |
    | G ← 1 - E

Fin Pour

Afficher  E et G
```

4. b. Déterminons l'affichage de cet algorithme pour N = 3:

L'affichage de cet algorithme pour $N = 3$ est: $E \approx 0,59$ et $G \approx 0,41$.

4. c. Déterminons l'état stable du système et interprétons:

A long terme, l'état P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial P_0.

Nous allons donc déterminer $P = (e \quad g)$.

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

Soit $P = (e \quad g)$, $P = P \times M \iff (e \quad g) = (e \quad g)\begin{pmatrix} 70\% & 30\% \\ 45\% & 55\% \end{pmatrix}$

$$\iff (e \quad g) = (0,7e + 0,45g \quad 0,3e + 0,55g)$$

$$\iff \begin{cases} 0,7e + 0,45g = e \\ 0,3e + 0,55g = g \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,3e - 0,45g = 0 \\ e + g = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e = 0,6 \\ g = 0,4 \end{cases}$$, et donc: $P = (0,6 \quad 0,4)$.

Au total, l'état stable du système est: $P = (0,6 \quad 0,4)$.

Cela signifie qu'après n années (" n très grand "), la part de marché de EfficaceRéseau sera stable autour de **60%**.

Quant à celle de GenialPhone, elle sera stable autour de **40%**.