Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LE MAGAZINE

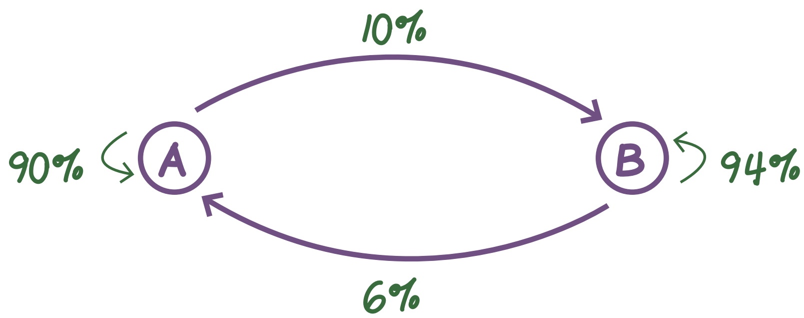
CORRECTION

1. a. Traduisons les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B:

Soient: • A, l'état: " abonné à la version papier ",

• B, l'état: " abonné à la version numérique ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



1. b. Déterminons la matrice de transition M de ce graphe, en respectant l'ordre alphabétique des sommets:

La matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}.$$

1. c. Montrons que $P_1 = (0,9 \quad 0,1)$:

Soient: M la matrice de transition du graphe probabiliste à 2 sommets (A et B), P_0 la matrice ligne décrivant l'état initial et P_1 l'état probabiliste à l'état $n = 1$.

Nous avons: $P_1 = P_0 \times M'$, avec $P_0 = (a_0 \quad b_0) = (1 \quad 0)$.

Dans ces conditions: $P_1 = (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$

cad: $P_1 = (0,9 \quad 0,1)$.

Au total, nous avons bien: $P_1 = (0,9 \quad 0,1)$.

2. Déterminons l'algorithme qui répond aux souhaits du directeur:

L'algorithme qui répond aux souhaits du directeur est: l'algorithme n° 2.

3. a. Montrons que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,84\, a_n + 0,06$:

D'après le cours, nous savons que pour tout n de IN: $P_{n+1} = P_n \times M$.

D'où: $(a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$

$\iff (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0,9a_n + 0,06b_n \quad 0,1a_n + 0,94b_n)$

$\Rightarrow a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$. (a)

Or, d'après le cours: $a_n + b_n = 1$, pour tout entier naturel n.

Dans ces conditions: (a) $\iff a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06\,(1 - a_n)$, car $b_n = 1 - a_n$

$\Rightarrow a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$.

Au total, pour tout entier naturel n, nous avons: $a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$.

3. b. Montrons que la suite (U_n) est géométrique et déterminons U_0 et q:

$U_n = a_n - 0,375 \iff U_{n+1} = a_{n+1} - 0,375$

$<=> \quad U_{n+1} = (0,84 a_n + 0,06) - 0,375 \quad (1).$

Or: $U_0 = a_0 - 0,375 \;=>\; U_0 = 0,625$ et $a_n = U_n + 0,375.$

Ainsi: $(1) <=> U_{n+1} = (0,84\,[U_n + 0,375] + 0,06) - 0,375$

$=> \; U_{n+1} = 0,84\; U_n.$

Par conséquent, (U_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,84$ et de premier terme $U_0 = 0,625.$

3. c. c1. Exprimons U_n en fonction de n:

Comme $U_{n+1} = 0,84\; U_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$U_n = U_0 \times (0,84)^n, \quad \text{avec:} \quad U_0 = 0,625.$$

En d'autres termes: $U_n = 0,625 \times (0,84)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. c. c2. Justifions que, pour tout entier naturel n, $a_n = 0,375 + 0,625 \times 0,84^n$:

Nous savons que: * $U_n = 0,625 \times (0,84)^n$

* $a_n = U_n + 0,375.$

D'où: $a_n = 0,625 \times (0,84)^n + 0,375$ ou $a_n = 0,375 + 0,625 \times 0,84^n.$

4. Déterminons l'année à partir de laquelle la proportion d'abonnés à la version papier du magazine devient inférieure à 50%:

Il s'agit de résoudre l'inéquation: $a_n < 0,5.$

$a_n < 0,5 \;<=>\; 0,625 \times (0,84)^n + 0,375 < 0,5$

$<=> \; (0,84)^n < 0,2$

$<=> \; n \ln(0,84) < \ln(0,2)$

$\Longleftrightarrow \ n > \dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,84)}$, car: $0,84 \in]0,1[$, et donc: $\ln(0,84) < 0$

$\Longrightarrow \ n > 9,23$

$\Longrightarrow \ n > 10$, car n est un entier naturel.

Au total, c'est à partir de " 2010 + 10 ", cad 2020, que la proportion d'abonnés à la version papier du magazine deviendra inférieure à 50%.