Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LE JOURNALISTE BRITANNIQUE

CORRECTION

Partie A:

1. a. Déterminons l'ordre du graphe:

Nous savons que l'ordre d'un graphe est égal au nombre de sommets.

Or ici, il y a: 6 sommets (B, L, M, N, P, T).

Ainsi: l'ordre du graphe est égal à **6**.

1. b. Justifions le fait que le graphe n'est pas complet:

D'après le cours, nous savons que:

- Deux sommets sont dits adjacents s'ils sont reliés par une arête.
- Un graphe dont les sommets sont 2 à 2 adjacents est aussi appelé graphe complet.

Ici, le graphe n'est pas complet car, par exemple, les sommets P et M ne sont pas adjacents.

Au total: le graphe n'est pas complet.

2. a. Est-ce-possible de parcourir chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule ?

Cela revient à déterminer si le graphe admet **une chaîne eulérienne**.

D'après le cours:

Le graphe étant connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Deux sommets (et deux seulement) X et Y de graphe sont de degré impair.
- Le graphe admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.

Or ici: le graphe (d'ordre 6) est connexe.

Et, nous avons le tableau des sommets degrés suivant:

Sommets	B	L	M	N	P	T
Degrés	4	5	2	3	4	4

(degré d'un sommet = nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité)

Comme il y a 2 sommets et deux seulement L et N qui sont de degré impair, d'après le **théorème d'Euler**, le graphe admet une chaîne eulérienne.

Donc: **oui**, c'est possible de parcourir chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule.

2. b. Va-t-il pouvoir le faire ?

Comme il y a deux sommets de degrés impairs, d'après le théorème d'Euler:

non, il n'est pas possible au journaliste de réaliser son souhait.

3. a. Recopions et complétons la matrice d'adjacence:

Voici la matrice d'adjacence recopiée et complétée:

$$G = \begin{array}{c|cccccc} & B & L & M & N & P & T \\ \hline B & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ L & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ M & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ N & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ P & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ T & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$G = \begin{array}{c} \\ B \\ L \\ M \\ N \\ P \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B & L & M & N & P & T \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} .$$

3. b. Déterminons le nombre de trajets possibles:

Pour répondre à cette question, il suffit (dans G^3) de déterminer le nombre qui se trouve à l'intersection entre la ligne de P et la colonne de M (ligne 5 et colonne 3).

On trouve ainsi: 5.

Donc **oui cela est possible** et il existe **5** chemins de longueur 3 pour aller de **Paris** à **Marseille**.

Les 5 chemins sont:
- P - B - T - M
- P - N - L - M
- P - T - L - M
- P - L - T - M
- P - B - L - M

Partie B:

Déterminons un trajet qui minimise son temps de parcours:

Notons que: le journaliste se trouve à Nantes et désire se rendre le plus rapidement possible (minimisation du temps) à Marseille.

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet que le journaliste doit suivre pour aller de N à M, tout en minimisant le temps de parcours: le trajet N - B - T - M.

Et ce trajet durera: 206 mn + 153 mn + 236 mn = 595 minutes.

Au total, le trajet que doit suivre le journaliste pour aller de N à M, tout en minimisant son temps de parcours est: **N - B - T - M**, et cela prendra **595 minutes** soit **9 h et 55 mn**.