

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes Terminale

Graphes, Matrices, Suites



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

# LE CONTRAT D'ENTRETIEN

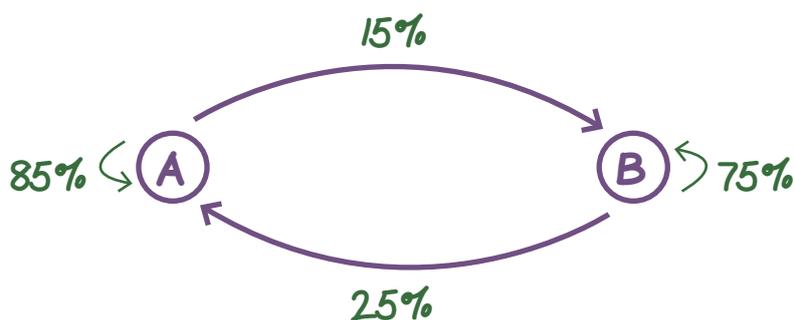
## CORRECTION

### Partie A:

1. a. Représentons le graphe probabiliste de cette situation:

- Soient:
- A, l'état: " sous contrat avec Alphacopy ",
  - B, l'état: " sous contrat avec Bêtacopy ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



1. b. Donnons la matrice de transition M:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 85\% & 15\% \\ 25\% & 75\% \end{pmatrix}.$$

2. Montrons que  $P = (0,625 \quad 0,375)$  est l'état stable:

Soit P l'état stable de ce graphe.

$P$  vérifie:  $P = P \times M$ , car l'état stable  $P$  est l'unique solution de l'équation

$$P = P \times M.$$

Posons:  $P = (0,625 \quad 0,375)$ . ( $0,625 + 0,375 = 1$ )

$$P \times M = (0,625 \quad 0,375) \begin{pmatrix} 85\% & 15\% \\ 25\% & 75\% \end{pmatrix} \Leftrightarrow P \times M = (0,625 \quad 0,375).$$

Ainsi, nous avons:  $P \times M = P$ , avec:  $P = (0,625 \quad 0,375)$ .

Donc:  $P$  correspond bien à l'état stable du système avec  $0,625 + 0,375 = 1$ .

### 3. L'entreprise Alphacopy peut-elle espérer atteindre son objectif ?

D'après l'énoncé: " l'objectif de l'entreprise Alphacopy est d'obtenir au moins 62% des contrats d'entretien ".

L'état stable  $P$  nous indique, au bout de  $n$  années ("  $n$  très grand "), le pourcentage de clients qui auront souscrit à un contrat chez Alphacopy, ainsi que celui des clients qui auront souscrit à un contrat chez Bêtacopy.

Comme ici:  $P = (62,5\% \quad 37,5\%)$ , nous pouvons affirmer qu'à long terme, 62,5% des clients auront souscrit à un contrat chez Alphacopy.

Donc: oui, Alphacopy peut espérer atteindre son objectif car  $62,5\% > 62\%$ .

## Partie B:

1. a. Montrons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n$ :

D'après le cours, nous savons que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_{n+1}$ , en fonction de  $P_n$  s'écrit:  $P_{n+1} = P_n \times M$ .

$$P_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \begin{pmatrix} 85\% & 15\% \\ 25\% & 75\% \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0,85a_n + 0,25b_n \quad 0,15a_n + 0,75b_n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n \text{ et } b_{n+1} = 0,15a_n + 0,75b_n.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons bien:  $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n$ .

1. b. Déduisons-en que  $a_{n+1} = 0,60a_n + 0,25$ :

Nous avons:  $a_n + b_n = 1$  ce qui revient à dire que  $b_n = 1 - a_n$ .

$$\text{D'où: } a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25b_n \Leftrightarrow a_{n+1} = 0,85a_n + 0,25(1 - a_n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = 0,60a_n + 0,25.$$

Au total, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons bien:  $a_{n+1} = 0,60a_n + 0,25$ .

2. a. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

$n \leftarrow 0$

$a \leftarrow 0,46$

Tant que  $a < 0,62$

$n \leftarrow n + 1$

$a \leftarrow 0,60 \times a + 0,25$

Fin Tant que

Afficher  $2017 + n$

2. b. Déterminons l'année en sortie de l'algorithme et interprétons cette valeur:

Pour répondre à cette question, à l'aide d'une machine à calculer, nous avons établi le tableau suivant:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$a_n$	0,46	0,526	0,5656	0,5893	0,6036	0,6121	0,6173	0,6203

Donc, dès que  $n = 7$ :  $a_n \geq 0,62$

Ainsi, l'année en sortie de l'algorithme est:  $n = 7$  ans.

Or:  $2017 + 7 = 2024$ .

Cela signifie donc que l'entreprise Alphacopy atteindra son objectif en 2024.

3. a. Montrons que la suite  $(U_n)$  est géométrique et déterminons  $U_0$  et  $q$ :

$$U_n = a_n - 0,625 \Leftrightarrow U_{n+1} = a_{n+1} - 0,625$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = (0,60 \times a_n + 0,25) - 0,625 \quad (1).$$

Or:  $U_0 = a_0 - 0,625 \Rightarrow U_0 = 0,46 - 0,625 = -0,165$  et  $a_n = U_n + 0,625$ .

Ainsi:  $(1) \Leftrightarrow U_{n+1} = (0,60 [U_n + 0,625] + 0,25) - 0,625$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = 0,60 U_n.$$

Par conséquent,  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 0,60$  et de premier terme  $U_0 = -0,165$ .

3. b. Exprimons  $U_n$  en fonction de  $n$  et montrons que pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = -0,165 \times 0,60^n + 0,625$ :

Comme  $U_{n+1} = 0,60 U_n$ , d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$U_n = -0,165 \times (0,60)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

De plus:  $a_n = U_n + 0,625$ .

D'où:  $a_n = -0,165 \times (0,60)^n + 0,625$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Au total, pour tout entier naturel  $n$ , nous avons bien:

$$a_n = -0,165 \times 0,60^n + 0,625.$$

3. c. c1. Résolvons l'inéquation  $a_n \geq 0,62$ :

$$a_n \geq 0,62 \iff -0,165 \times 0,60^n + 0,625 \geq 0,62$$

$$\iff 0,60^n \leq \frac{0,005}{0,165}$$

$$\iff n \ln(0,60) \leq \ln\left(\frac{0,005}{0,165}\right)$$

$$\iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{0,005}{0,165}\right)}{\ln(0,60)}, \text{ car: } 0,60 \in ]0,1[, \text{ et donc: } \ln(0,60) < 0$$

$$\iff n \geq 6,85.$$

Nous prendrons  $n = 7$  car  $n$  est un entier naturel.

3. c. c2. Quel résultat retrouve-t-on ?

Nous retrouvons le fait qu'en  $2017 + 7 = 2024$ , l'entreprise Alphacopy atteindra pour la première fois son objectif: "obtenir au moins 62% des contrats d'entretien".