

www.freemaths.fr

Maths Expertes Terminale

Graphes, Matrices, Suites



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'EST DES ÉTATS-UNIS

CORRECTION

1. a. Quelles caractéristiques ?

Les caractéristiques du graphe prouvant qu'il existe un trajet qui permette à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois sont :

- **Le graphe est connexe** car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe. En effet, deux sommets quelconques de ce graphe peuvent, par exemple, être reliés par une chaîne extraite de la chaîne : $A - B - C - M - N - W$.
- **Le graphe G admet une chaîne eulérienne.**

En effet, d'après le cours :

G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- Deux sommets (et deux seulement) X et Y de G sont de degré impair.
- G admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y .

Ici, le tableau des sommets degrés est le suivant :

Sommets	A	B	C	M	N	W
Degrés	2	2	4	3	3	4

Il y a donc 2 sommets M et N de degré impair.

Par conséquent : **le graphe admet une chaîne eulérienne.**

Ainsi, d'après le théorème d'Euler: oui, il existe un trajet qui permet à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois.

1. b. Donnons un exemple d'un tel trajet:

Un exemple pour aller de N à M est: N - B - C - W - N - M - W - A - C - M.

2. Déterminons le trajet le moins cher, pour aller de B à M, ainsi que le coût de ce trajet:

Après recours à l'algorithme de Dijkstra, nous trouvons comme trajet qu'Alexis doit suivre pour aller de B à M, tout en minimisant ses coûts:

le trajet B - C - M.

Et ce trajet coûtera: $130 + 150 = 280$ dollars.

Au total, le trajet qu'Alexis doit suivre pour aller de Boston à Miami, tout en minimisant sa dépense est: B - C - M, et Alexis dépensera 280 dollars.

3. a. Donnons la matrice d'adjacence P de ce graphe:

La matrice d'adjacence P de ce graphe est:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. b. Déterminons le nombre de trajets possibles:

Comme Alexis désire utiliser trois liaisons aériennes maximum, pour aller d'Atlanta à Boston, nous devons écrire: M , M^2 et M^3 .

• $M = P$,

• $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, à l'aide d'une calculatrice,

• $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 9 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, à l'aide d'une calculatrice.

Pour répondre à la question, nous allons regarder le chiffre indiqué sur la 1^{ère} ligne (A), 2^{ème} colonne (B), et ce, pour les matrices M , M^2 et M^3 .

Pour M : le chiffre est: 0.

Pour M^2 : le chiffre est: 1.

Pour M^3 : le chiffre est: 2.

Au total, il existe trois possibilités pour Alexis:

- relier A à B en 2 liaisons aériennes: A - C - B

(coûts = 100 + 130 \Rightarrow coûts = 230 dollars),

- relier A à B en 3 liaisons aériennes: A - W - C - B

(coûts = 130 + 120 + 130 \Rightarrow coûts = 380 dollars),

- relier A à B en 3 liaisons aériennes: A - W - N - B

(coûts = 130 + 140 + 170 \Rightarrow coûts = 440 dollars).

Alexis aura tout intérêt à choisir le trajet A - C - B car c'est le moins cher pour son portefeuille.