Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'ÉLECTION PRÉSIDENTIELLE

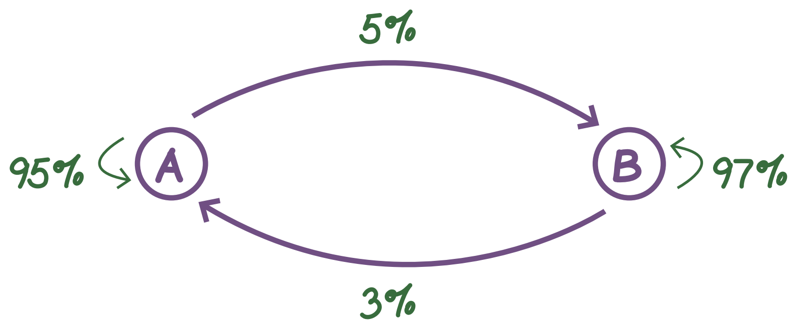
CORRECTION

1. a. Dessinons le graphe probabiliste G de sommets A et B:

Soient: • A, l'état: " voter pour le candidat A ",

• B, l'état: " voter pour le candidat B ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



1. b. Ecrivons la matrice M associée à ce graphe:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 3\% & 97\% \end{pmatrix}.$$

2. Démontrons que $P_1 = (0,628 \quad 0,372)$:

D'après le cours: $P_1 = P_0 \times M$.

Or: $P_0 = (0,65 \quad 0,35)$.

D'où: $P_1 = (0,65 \quad 0,35)\begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 3\% & 97\% \end{pmatrix}$ => $P_1 = (62,8\% \quad 37,2\%)$.

Au total, nous avons bien: $P_1 = (0,628 \quad 0,372)$.

3. a. Montrons que les nombres a et b vérifient bien le système:

D'après le cours, nous savons que l'état stable $P = (a \quad b)$ est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

$$P = P \times M \iff (a \quad b) = (a \quad b)\begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 3\% & 97\% \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0,95a + 0,03a \\ b = 0,05a + 0,97b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,05a - 0,03b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}.$$

Au total, le système est bien vérifié.

3. b. Résolvons le système:

$$\begin{cases} 0,05a - 0,03b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 37,5\% \\ b = 62,5\% \end{cases}.$$

Et donc: $P = (37,5\% \quad 62,5\%)$.

Ainsi: $a = 37,5\%$ et $b = 62,5\%$.

3. c. Interprétation:

L'état stable P nous indique, au bout de n années (" n très grand "), le pourcentage d'adhérents qui déclareront voter pour le candidat A, ainsi que celui des adhérents qui déclareront voter pour le candidat B.

Comme ici: $P = (37,5\% \quad 62,5\%)$, nous pouvons affirmer qu'**à long terme**, 37,5% d'adhérents voteront pour le candidat A et 62,5% voteront pour le candidat B.

4. a. Montrons que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,92\,a_n + 0,03$:

D'après le cours, nous savons que, pour tout entier naturel n, P_{n+1} en fonction de P_n s'écrit: $P_{n+1} = P_n \times M$.

$$P_{n+1} = P_n \times M \iff (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n)\begin{pmatrix} 95\% & 5\% \\ 3\% & 97\% \end{pmatrix}$$

$$\iff (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0,95\,a_n + 0,03\,b_n \quad 0,05\,a_n + 0,97\,b_n)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 0,95\,a_n + 0,03\,b_n. \quad (1)$$

Or: $a_n + b_n = 1$.

D'où: $(1) \Rightarrow a_{n+1} = 0,92\,a_n + 0,03$.

Au total, pour tout entier naturel n, nous avons bien: $a_{n+1} = 0,92\,a_n + 0,03$.

4. b. Montrons que la suite (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$$V_n = a_n - 0,375 \iff V_{n+1} = a_{n+1} - 0,375$$

$$\iff V_{n+1} = (0,92\,a_n + 0,03) - 0,375 \quad (2).$$

Or: $V_0 = a_0 - 0,375 \Rightarrow V_0 = 0,65 - 0,375 = 0,275$ et $a_n = V_n + 0,375$.

Ainsi: (2) <=> $V_{n+1} = (0,92\,[V_n + 0,375] + 0,03) - 0,375$

=> $V_{n+1} = 0,92\, V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $V_0 = 0,275$.

4. c. c1. Pour tout entier naturel n, exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,92\, V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_0 \times (0,92)^n$, avec: $V_0 = 0,275$.

En d'autres termes: $V_n = 0,275 \times (0,92)^n$, pour tout $n \in$ –.

4. c. c2. Déduisons-en a_n:

Pour tout entier naturel n: $a_n = V_n + 0,375$ => $a_n = 0,275 \times (0,92)^n + 0,375$.

Au total, pour tout $n \in$ –, nous avons: $a_n = 0,275 \times (0,92)^n + 0,375$.

5. Déterminons le candidat qui sera probablement élu:

Pour répondre à cette question, nous allons calculer a_{11} et b_{11}.

Ici: • $a_{11} = 0,275 \times (0,92)^{11} + 0,375$ => $a_{11} \approx 48\%$,

• $b_{11} = 1 - a_{11}$ => $b_{11} \approx 52\%$.

Comme $a_{11} < b_{11}$: ce sera le candidat B qui sera probablement élu, si la campagne électorale dure 11 mois.