Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'AUTOMATE

CORRECTION

Partie A:

1. Quels sont les mots reconnus par l'automate ?

Nous savons qu'une succession de lettres est reconnue par l'automate si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté, en partant de 1 et en sortant à 4.

Analysons les 3 cas: **abab, abc, abbcbb**.

• **abab**:

Le mot **abab** correspond au chemin: $1 \to 2 \to 3 \to 3 \to 4$.

Donc: **oui**, ce mot est reconnu par l'automate.

• **abc**:

Le mot **abc** correspond au chemin: $1 \to 2 \to 3 \to ?$

Donc: **non**, ce mot n'est pas reconnu par l'automate.

• **abbcbb**:

Le mot **abbcbb** correspond au chemin: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 2 \to 3 \to 4$.

Donc: **oui**, ce mot est reconnu par l'automate.

2. **Recopions et complétons la matrice d'adjacence M**:

Voici la matrice d'adjacence (les sommets étant rangés dans l'ordre croissant) recopiée et complétée:

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. a. **Déterminons le nombre de mots de 4 lettres reconnus par l'automate**:

Pour répondre à cette question, il suffit dans M^4 de déterminer le nombre qui se trouve à l'intersection entre la ligne **1** et la colonne **4**.

En effet, ce nombre qui est égal à **5** ici correspond au nombre de mots de 4 lettres qui commencent par le sommet **1** et finissent par le sommet **4**.

Ainsi: 5 mots de 4 lettres sont reconnus par l'automate.

3. b. **Déterminons ces mots**:

Les mots reconnus par l'automate cad les 5 chemins de longueur 4 sont:

- le mot **abab** qui correspond au chemin: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 4$,
- le mot **bbab** qui correspond au chemin: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 4$,
- le mot **acbb** qui correspond au chemin: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$,
- le mot **bcbb** qui correspond au chemin: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$,
- le mot **baab** qui correspond au chemin: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

Partie B:

1. a. Peut-il parcourir l'ensemble du réseau en empruntant chaque route une et une seule fois ?

Cela revient à déterminer si le graphe admet **une chaîne eulérienne**.

D'après le cours:

Le graphe étant connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Zéro ou deux sommets (et deux seulement) X et Y du graphe sont de degré impair.
- Le graphe admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.

Or ici: **le graphe (d'ordre 8) est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.**

Et, nous avons le tableau des sommets degrés suivant:

Sommets	A	B	C	E	G	L	P	V
Degrés	2	2	4	4	3	5	4	4

(degré d'un sommet = nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité)

Comme il y a 2 sommets et deux seulement G et L qui sont de degré impair, d'après le **théorème d'Euler**, le graphe admet une chaîne eulérienne.

Donc: **oui**, c'est possible de parcourir l'ensemble du réseau en empruntant chaque route une et une seule fois.

1. b. Précisons par quelles villes de ce réseau routier le technicien doit commencer sa vérification:

Le technicien doit obligatoirement commencer sa vérification par un sommet de degré impair.

Ainsi: il doit commencer soit par **Grenoble** soit par **Lyon**.

2. a. Déterminons le plus court chemin entre les villes " Bourg-en-Bresse " et " Aurillac ":

Notons que: le technicien se trouve à Bourg-en-Bresse **(B)** et désire se rendre le plus rapidement possible (minimisation de la distance) à Aurillac **(A)**.

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet que le technicien doit suivre pour aller de B à A, tout en minimisant la distance parcourue: le trajet **B – L – E – P – A**.

Et ce trajet aura pour longueur:

$$80 \text{ km} + 70 \text{ km} + 80 \text{ km} + 180 \text{ km} = 410 \text{ kilomètres.}$$

En effet, **l'algorithme de Dijkstra** est le suivant:

From ... to	C	E	G	L	P	V	A
B	∞	∞	180B	80B	∞	∞	∞
L (80)	260L	150L	180B		∞	180L	∞
E (150)	260L		180B		230E	180L	∞
G (180)	260L				230E	180L	∞
V (180)	260L				230E		∞
P (230)	260L						410P
C (260)							410P

Au total, le trajet que le technicien doit suivre pour aller de B à A, tout en minimisant la distance parcourue est:

B – L – E – P – A, et ce trajet aura pour longueur **410 kilomètres**.

2. b. Quel chemin le technicien doit-il emprunter compte tenu de la contrainte ?

La route entre Le Puy-en-Velay **(P)** et Aurillac **(A)** étant fermée à la circulation, d'après l'algorithme de **Dijkstra**, le chemin le plus court est:

B – L – C – A.

Et ce chemin aura pour longueur:

80 km + 180 km + 160 km = 420 kilomètres.

Au total, le chemin que le technicien doit suivre pour aller de P à A, tout en minimisant la distance parcourue est:

B – L – C – A, et ce chemin aura pour longueur **420 kilomètres**.