Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

JULIE

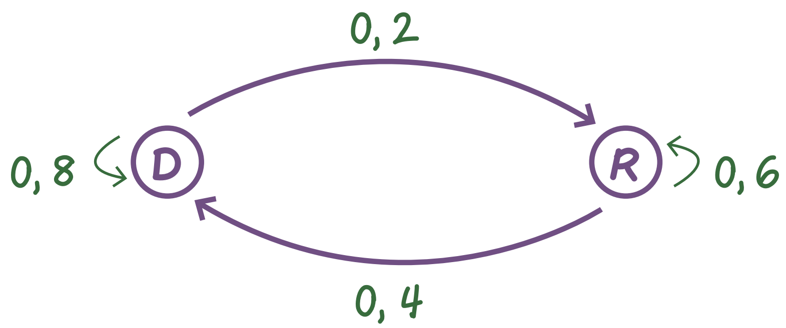
CORRECTION

1. a. Représentons cette situation par un graphe probabiliste:

Soient: • D, l'état: " Julie emprunte les routes départementales ",

• R, l'état: " Julie emprunte la voie rapide ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



1. b. Donnons la matrice de transition M de ce graphe:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

2. a. Donnons P_1:

$P_1 = (d_1 \quad r_1)$.

Or d'après l'énoncé: " le premier jour, Julie emprunte la voie rapide ".

D'où: $r_1 = 1$, et par conséquent $d_1 = 0$ (car $r_1 + d_1 = 1$).

Ainsi: $P_1 = (0 \quad 1)$.

2. b. b1. Calculons M^2:

$M^2 = M \times M \iff M^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

$\iff M^2 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}$.

Ainsi: $M^2 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}$.

2. b. b2. Déduisons-en la probabilité que Julie emprunte les routes départementales le 3e jour:

Il s'agit ici de calculer d_3.

Pour cela, nous allons calculer: $P_3 = (d_3 \quad r_3)$.

D'après le cours: $P_3 = P_1 \times M^{(3-1)}$ **cad** $P_3 = P_1 \times M^2$.

Or: $P_1 = (0 \quad 1)$ et $M^2 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}$.

D'où: $P_3 = (0 \quad 1) \times \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}$

$= (0,56 \quad 0,44)$.

D'où: $d_3 = 0,56$.

Au total: il y a **56%** de chance pour que Julie emprunte les routes départementales, le 3e jour.

3. a. a1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimons P_{n+1} en fonction de P_n:

D'après le cours, nous savons que pour tout entier naturel non nul n, P_{n+1} en fonction de P_n s'écrit: $P_{n+1} = P_n \times M$.

$P_{n+1} = P_n \times M \iff (d_{n+1} \quad r_{n+1}) = (d_n \quad r_n) \times M$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_{n+1} = P_n \times M$.

3. a. a2. Déduisons-en d_{n+1} et r_{n+1} en fonction de d_n et r_n:

$$P_{n+1} = P_n \times M \iff (d_{n+1} \quad r_{n+1}) = (d_n \quad r_n) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} d_{n+1} = 0,8d_n + 0,4r_n \\ r_{n+1} = 0,2d_n + 0,6r_n \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} d_{n+1} = 0,8d_n + 0,4r_n \\ r_{n+1} = 0,2d_n + 0,6r_n \end{cases}$.

3. b. Quel algorithme choisir ?

Nous choisissons l'algorithme: **3** car c'est le seul qui permet le calcul de d_3 et r_3.

4. Montrons que, pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,4r_n + 0,2$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $d_n + r_n = 1$ ce qui revient à dire $d_n = 1 - r_n$.

D'où: $r_{n+1} = 0,2d_n + 0,6r_n \iff r_{n+1} = 0,2\,(1 - r_n) + 0,6r_n$

$\iff r_{n+1} = 0,4r_n + 0,2$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons bien: $r_{n+1} = 0,4r_n + 0,2$.

5. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme:

$V_n = r_n - \frac{1}{3} \iff V_{n+1} = r_{n+1} - \frac{1}{3}$

$\iff V_{n+1} = (0,4 \times r_n + 0,2) - \frac{1}{3}$ (1).

Or: $V_1 = r_1 - \frac{1}{3} \Rightarrow V_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $r_n = V_n + \frac{1}{3}$.

Ainsi: (1) $\iff V_{n+1} = (0,4\,[\,V_n + \frac{1}{3}\,] + 0,2) - \frac{1}{3}$

$\iff V_{n+1} = 0,4\,V_n$.

Par conséquent, (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,4$ et de premier terme $V_1 = \frac{2}{3}$.

5. b. Exprimons V_n en fonction de n et montrons que pour tout entier naturel non nul n, $r_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times 0,4^n$:

Comme $V_{n+1} = 0,4\,V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_1 \times (0,4)^{(n-1)} \iff V_n = \frac{2}{3} \times (0,4)^{(n-1)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

De plus: $r_n = V_n + \frac{1}{3}$.

D'où: $r_n = \frac{2}{3} \times (0,4)^{(n-1)} + \frac{1}{3}$ cad $r_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times (0,4)^n$.

(car: $\frac{2}{3} \times (0,4)^{(n-1)} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{0,4} \times (0,4)^n = \frac{2}{3} \times \frac{5}{2} \times (0,4)^n$)

Au total, pour tout entier naturel n non nul, nous avons bien: $r_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times (0,4)^n$.

5. c. Que peut-on prévoir à long terme ?

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times (0,4)^n$$

$$= \frac{1}{3} \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{3} \times (0,4)^n = 0, \text{ car: } 0,4 \in \left]0 ; 1\right[.$$

Ainsi, à long terme, il y a une chance sur trois pour que Julie emprunte la voie rapide.