Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

DU DOMICILE AU TRAVAIL

CORRECTION

Partie A:

Déterminons le chemin le plus court qui permet à Louis de relier son domicile à son travail:

Notons que: Louis souhaite aller de A à G.

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet que Louis doit suivre pour aller de A à G, tout en minimisant la distance (chemin le plus court): le trajet A - E - D - G.

Et ce trajet aura pour longueur: 23 km $+ 42$ km $+ 15$ km $= 80$ kilomètres.

Au total, le trajet que Louis doit suivre pour aller de A à G, tout en minimisant la distance parcourue est:

A - E - D - G, et ce trajet aura pour longueur **80 kilomètres**.

Partie B:

1. a. Précisons l'état probabiliste P_0:

D'après l'énoncé, le 1er janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage.

Dans ces conditions: $c_0 = 1$ et $t_0 = 0$.

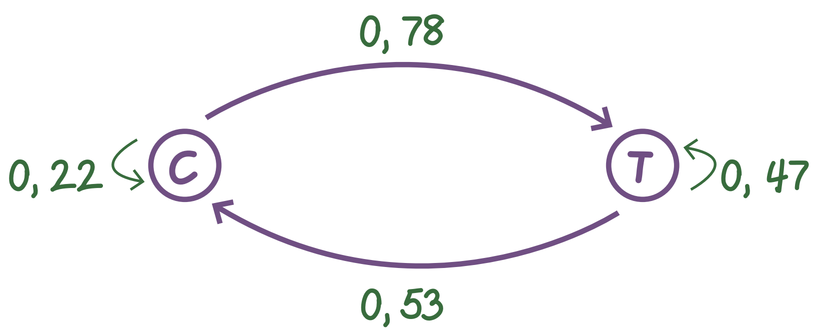
D'où l'état probabiliste P_0 est: $P_0 = (1 \quad 0)$.

1. b. Représentons le graphe probabiliste de cette situation:

Soient: • C, l'état: " Covoiturage ",

• T, l'état: " Transports en commun ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Donnons la matrice de transition M:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}.$$

3. Calculons P_2 et interprétons:

Il s'agit ici de calculer $P_2 = (c_2 \quad t_2)$.

D'après le cours: $P_2 = P_0 \times M^{(2-0)}$ **cad** $P_2 = P_0 \times M^2$.

Or: $P_0 = (1 \quad 0)$, **d'après question 1. a**

D'où: $P_2 = (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}^2$

$= (0,4618 \quad 0,5387)$.

Donc: $c_3 = 0,4618$ et $t_3 = 0,5387$.

Au total: $P_2 = (46,18\% \quad 53,87\%)$.

Cela signifie qu'au bout de 2 jours: Louis a 46, 18% de chance d'utiliser le covoiturage et 53, 87% de chance d'avoir recours aux transports en commun.

4. a. a1. Calculons les valeurs exactes de x et y:

A long terme, l'état P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial P_0.

Nous allons donc déterminer: $P = (x \quad y)$.

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

Soit $P = (x \quad y)$, $P = P \times M \iff (x \quad y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}$

$$\iff (x \quad y) = (0,22x + 0,53y \quad 0,78x + 0,47y)$$

$$\iff \begin{cases} 0,22x + 0,53y = x \\ 0,78x + 0,47y = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,78x - 0,53y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{0,53}{1,31} \\ y = \dfrac{0,78}{1,31} \end{cases} \text{, et donc: } P = \begin{pmatrix} \dfrac{53}{131} & \dfrac{78}{131} \end{pmatrix}.$$

Au total, l'état stable du système est: $P = \begin{pmatrix} \frac{53}{131} & \frac{78}{131} \end{pmatrix}$.

4. a. a2. Calculons les valeurs approchées à 0, 01 prés de x et y:

Les valeurs approchées à 0, 01 prés de x et y sont:

$x \approx 40\%$ **et** $y \approx 60\%$.

4. b. A long terme, Louis utilisera-t-il aussi souvent le covoiturage que les transports en commun ?

A la question précédente, nous avons trouvé: $P \approx (40\% \quad 60\%)$.

Cela signifie qu'après n jours (" n très grand "), la probabilité pour Louis d'utiliser le covoiturage sera d'environ 40% et celle d'avoir recours aux transports en commun sera d'environ 60%.

Or:
- **$40\% \neq 50\%$**
- **$60\% \neq 50\%$**.

Donc à long terme **non** Louis n'utilisera pas aussi souvent le covoiturage que les transports en commun.