

www.freemaths.fr

Maths Expertes Terminale

Graphes, Matrices, Suites



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

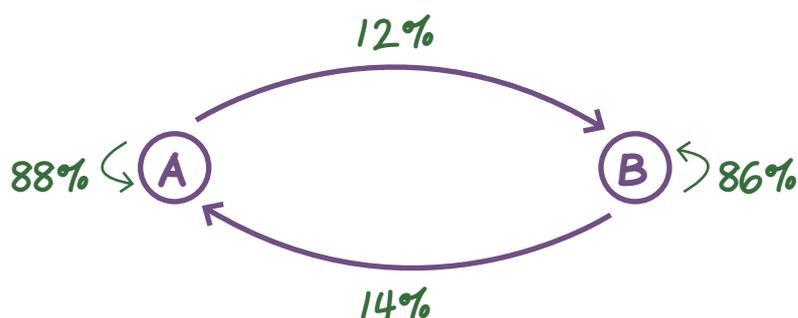
CORRECTION

Partie A:

1. Dessinons le graphe probabiliste:

- Soient:
- A, l'état: " l'abonné est chez Alpha ",
 - B, l'état: " l'abonné est chez Bravo ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Déterminons $P_0 = (a_0 \quad b_0)$:

D'après l'énoncé: " En 2015, Alpha possède 30% du marché de téléphonie mobile ".

D'où: $a_0 = 30\%$ et $b_0 = 1 - a_0 = 70\%$.

Au total: $P_0 = (30\% \quad 70\%)$.

Ainsi en 2015:

- Alpha a 30% de part de marché,
- Bravo a 70% de part de marché.

3. Montrons qu'en 2018, il y aura environ 44,2% des abonnés chez l'opérateur Alpha:

$$2018 = 2015 + "3".$$

Donc cela revient à déterminer "x", avec x tel que: $P_3 = (x \ y)$.

D'après le cours, pour tout entier naturel n: $P_n = P_0 \times M^{(n-0)}$

$$\Leftrightarrow P_3 = P_0 \times M^3.$$

Or: $M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$ et $P_0 = (30\% \ 70\%)$.

D'où: $P_3 = (30\% \ 70\%) \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}^3 \Rightarrow P_3 \approx (0,442 \ 0,558)$, à l'aide d'une calculatrice.

Ainsi: environ $x = 44,2\%$ des abonnés seront chez l'opérateur de téléphonie Alpha en 2018.

4. a. Montrons que les nombres x et y vérifient bien le système:

D'après le cours, nous savons que l'état stable $P = (x \ y)$ est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

$$P = P \times M \Leftrightarrow (x \ y) = (x \ y) \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,88x + 0,14y \\ y = 0,12x + 0,86y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,12x - 0,14y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Au total, le système est bien vérifié.

4. b. Résolvons le système:

$$\begin{cases} 0,12x - 0,14y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \approx 53,84\% \\ y \approx 46,16\% \end{cases}, \text{ et donc: } P = (53,84\% \quad 46,16\%).$$

Ainsi: $x \approx 53,84\%$ et $y \approx 46,16\%$.

4. c. Déterminons la répartition des abonnés à long terme:

L'état stable P nous indique, au bout de n années (" n très grand "), le pourcentage des abonnés qui seront chez Alpha, ainsi que celui des abonnés qui seront chez Bravo.

Comme ici: $P = (53,84\% \quad 46,16\%)$, nous pouvons affirmer qu'à long terme 53,84% des abonnés seront chez Alpha et 46,16% seront chez Bravo.

Partie B:

1. A l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminons le tracé de la fibre optique le moins cher à déployer, entre les stations C et G:

Après recours à l'algorithme de Dijkstra, nous trouvons comme tracé de la fibre optique le moins cher pour aller de C à G: **le trajet** C - A - H - F - G.

2. Déterminons, en milliers d'euros, le coût de ce tracé:

Ce tracé coûtera: $25 + 10 + 10 + 5 = 50\,000\text{€}$.

Au total, le tracé de la fibre optique le moins cher pour aller de C à G est:

C - A - H - F - G, et il coûtera 50 000€.