Maths Expertes
Terminale

Graphes, Matrices, Suites

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ACHETER SUR INTERNET

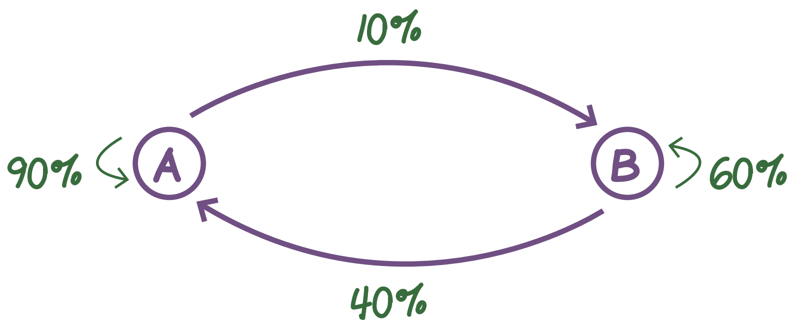
CORRECTION

1. Traduisons les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B:

Soient: • A, l'état: " La personne effectue son achat sur Internet ",

• B, l'état: " La personne effectue son achat en magasin ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Ecrivons la matrice de transition M de ce graphe, en respectant l'ordre alphabétique des sommets:

La matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

3. a. Calculons la matrice M^4:

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Au total:

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

3. b. Déduisons-en que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5e achat sur Internet est de 81,25%:

Soient: M la matrice de transition du graphe probabiliste à 2 sommets (A et B), P_1 la matrice ligne décrivant l'état initial et P_5 l'état probabiliste à l'état $n = 5$.

Nous avons: $P_5 = P_1 \times M^{(5-1)}$, avec $P_1 = (a_1 \quad b_1) = (1 \quad 0)$.

Dans ces conditions: $P_5 = (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$

cad: $P_5 = (0,8125 \quad 0,1875)$.

D'où: $a_5 = 81,25\%$ et $b_5 = 18,75\%$.

Au total, la probabilité que la personne interrogée fasse son 5e achat sur Internet correspond à: a_5 cad 81,25%.

4. a. Montrons que les nombres a et b sont bien solutions du système donné:

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation $P = P \times M$.

Or ici, la matrice associée au graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Posons: $P = (a \quad b)$.

Dans ces conditions: $P = P \times M$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \times a + 0,4 \times b & 0,1 \times a + 0,6 \times b \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 0,9 \times a + 0,4 \times b \\ b = 0,1 \times a + 0,6 \times b \end{cases}.$$

Au total, les nombres a et b sont bien solutions du système:

$$\begin{cases} a = 0,9 \times a + 0,4 \times b \\ b = 0,1 \times a + 0,6 \times b \end{cases} \text{ cad: } \begin{cases} 0,1a - 0,4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}.$$

4. b. Résolvons le système:

$$\begin{cases} 0,1a - 0,4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0,1a - 0,4\,(1 - a) = 0 \\ b = 1 - a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0,8 \\ b = 0,2 \end{cases}.$$

Au total: $P = (0,8 \quad 0,2)$ correspond à l'état stable de ce graphe.

4. c. Déterminons, à long terme, la probabilité que cette personne fasse ses achats sur Internet:

A long terme, l'état de P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial P_1.

Or l'état stable nous indique qu'au bout de n années (" n très grand "), la probabilité que la personne fasse ses achats sur Internet est de:

$$0,8 \text{ cad: } 80\%.$$

Au total: à long terme, la probabilité que la personne fasse ses achats sur Internet est de 80%.

5. a. Montrons que, pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$:

D'après le cours, nous savons que pour tout n de IN*: $P_{n+1} = P_n \times M$.

D'où: $(a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

<=> $(a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0,9a_n + 0,4b_n \quad 0,1a_n + 0,6b_n)$

=> $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n$. (a)

Or, d'après le cours: $a_n + b_n = 1$, pour tout entier naturel non nul n.

Dans ces conditions: (a) <=> $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4\,(1 - a_n)$, car $b_n = 1 - a_n$

=> $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.

Au total, pour tout entier naturel non nul n, nous avons: $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.

5. b. Complétons l'algorithme:

L'algorithme complété est le suivant:

Initialisation:

...

...

Traitement: Tant que $A > 0,801$

| Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,4$

| Affecter à N la valeur $N + 1$

Fin du Tant que

Sortie: Afficher N

5. c. **Déterminons la valeur affichée par l'algorithme en sortie:**

La valeur affichée à la fin de l'exécution est: $N = 9$.

En effet: • $P_8 = (0,801 \quad 0,1984)$

• $P_9 = (0,8008 \quad 0,1992)$.