Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Nombres premiers

06

Correction

Dans cet exercice, *n* est un entier relatif et $A = n^4 - 12n^2 + 16$.

1. Factorisons *A* :

L'expression de *A* que l'énoncé nous fait « remarquer » : $A = (n^4 - 8n^2 + 16) - 4n^2$ permet de considérer *A* comme une différence de deux carrés.

En effet, nous pouvons reconnaître dans l'expression $(n^4 - 8n^2 + 16)$ le développement d'un carré, celui de $(n^2 - 4)$; nous y reconnaissons les carrés de n^2 et de 4 ainsi que leur double produit. Par ailleurs, $4n^2$ est le carré de $2n$.

Nous sommes ainsi amenés à utiliser l'identité : $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ avec $\begin{cases} x = n^2 - 4 \\ y = 2n \end{cases}$

Utilisons cette différence de deux carrés pour factoriser *A* :

$$A = (n^2 - 4)^2 - (2n)^2 = \big((n^2 - 4) - 2n\big)\big((n^2 - 4) + 2n\big)$$

Retenons, en ordonnant correctement chacune des deux parenthèses, la factorisation de *A* en deux trinômes du second degré :

$$A = (n^2 - 4)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n - 4)(n^2 + 2n - 4)$$

NB. Nous pourrions continuer en factorisant chacun des deux trinômes en deux binômes du premier degré. Une calculatrice formelle fournit d'ailleurs cette factorisation :

$$\text{factor}(n^4 - 12 \cdot n^2 + 16, n) \qquad (n + \sqrt{5} - 1) \cdot (n + \sqrt{5} + 1) \cdot (n - \sqrt{5} + 1) \cdot (n - \sqrt{5} - 1)$$

Mais il ne s'agit pas du tout de la factorisation recherchée car les quatre binômes du premier degré obtenus sont à coefficients réels, non entiers. C'est bien la factorisation en deux trinômes du second degré en *n* à coefficients entiers qui est la factorisation attendue.

2. Montrons que si *n* est pair, alors *A* n'est pas premier :

Si *n* est pair, alors il existe un entier relatif *k* tel que $n = 2k$.

Exprimons *A* en fonction de *k* :

$$\begin{cases}(n^2 - 2n - 4) = 4k^2 - 4k - 4 = 4 \times (k^2 - k - 1) \\ (n^2 + 2n - 4) = 4k^2 + 4k - 4 = 4 \times (k^2 + k - 1)\end{cases} \text{ donc } A = 16 \times (k^2 - k - 1)(k^2 + k - 1).$$

A est un multiple de 16, ce n'est pas un nombre premier.

3.a. Si $n = 2k + 1$, exprimons *A* en fonction de *k* :

Si *n* est impair, il existe un entier relatif *k* tel que $n = 2k + 1$.

Exprimons *A* en fonction de *k* :

$$\begin{cases}(n^2 - 2n - 4) = (2k + 1)^2 - 2(2k + 1) - 4 = (4k^2 + 4k + 1) - (4k + 2) - 4 = 4k^2 - 5 \\ (n^2 + 2n - 4) = (4k^2 + 4k + 1) + (4k + 2) - 4 = 4k^2 + 8k - 1\end{cases}.$$

Conformément à l'indication de l'énoncé, nous obtenons :

$$A = (4k^2 - 5)(4k^2 + 8k - 1).$$

3.b Déduisons-en les valeurs de *n* pour lesquelles *A* est un nombre premier :

Compte tenu de l'expression de *A* en fonction de *k* obtenue dans la **question 3**, *A* se présente comme un produit de deux nombres entiers.

Une condition nécessaire pour que *A* soit susceptible d'être un nombre premier ou l'opposé d'un nombre premier est que l'un des deux facteurs soit égal à 1 ou bien à -1.

Nous avons donc plusieurs possibilités à passer en revue :

- $4k^2 - 5 = 1$ soit $4k^2 = 6$. Aucune solution entière.
- $4k^2 - 5 = -1$ soit $4k^2 = 4$. D'où $k = 1$ et $n = 3$ ou bien $k = -1$ et $n = -1$.
- $4k^2 + 8k - 1 = 1$ soit $2k^2 + 4k - 1 = 0$. Aucune solution entière.
- $4k^2 + 8k - 1 = -1$ soit $k^2 + 2k = 0$. $k = 0$ et $n = 1$ ou $k = -2$ et $n = -3$.

Bilan :

Les valeurs de *n* pour lesquelles *A* ou bien son opposé est un nombre premier (surlignage en jaune dans ce cas) sont les suivantes :

Valeurs de *n*	-3	-1	1	3
Valeurs de *A*	-11	5	5	-11
Valeurs de $-A$	11	-5	-5	11