Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE, SYNTHÈSE 10

CORRECTION

Partie A:

1. Montrons que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n \times M$:

Soient les programmes:
- A: " cirque-éveil musical ",
- B: " théâtre-arts plastiques ".

Le nombre d'inscrits au programme A durant l'année 2014 + " n+1 " est:

$$a_{n+1} = 0,2 \times a_n + 0,4 \times b_n + 0,4 \times a_n.$$

$0,2 \times a_n$ = 20% des inscrits à A, choisissent à nouveau A, l'année suivante

$0,4 \times b_n$ = 40% des inscrits à A, choisissent le programme B, l'année suivante

$0,4 \times a_n$ = les nouveaux inscrits, qui compensent les départs (40%), suivent obligatoirement le programme A.

De même: $b_{n+1} = 0,4 \times a_n + 0,6 \times b_n.$

Au total: $\begin{cases} a_{n+1} = 0,6 \times a_n + 0,4 \times b_n \\ b_{n+1} = 0,4 \times a_n + 0,6 \times b_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$\iff U_{n+1} = U_n \times M.$

2. Montrons que, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$ ".

Initialisation: • $U_0 = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^0 & 75 - 75 \times 0,2^0 \end{pmatrix}$?

oui car: $\begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^0 & 75 - 75 \times 0,2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 & 0 \end{pmatrix}$,

et: $U_0 = \begin{pmatrix} 150 & 0 \end{pmatrix}$, d'après l'énoncé.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n:
$U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$ et
montrons qu'alors $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times (0,2)^{n+1} & 75 - 75 \times (0,2)^{n+1} \end{pmatrix}$.

Supposons: $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} a_n = 75 + 75 \times 0,2^n \\ b_n = 75 - 75 \times 0,2^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,6a_n + 0,4b_n = \dots \\ 0,4a_n + 0,6b_n = \dots \end{cases} \text{(on remplace)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 75 + 75 \times (0,2)^{n+1} \\ b_{n+1} = 75 - 75 \times (0,2)^{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times (0,2)^{n+1} & 75 - 75 \times (0,2)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$.

3. **Déduisons-en la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes:**

Pour répondre à cette question, nous allons calculer les limites en $+\infty$ de " a_n " et de " b_n ".

- $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} 75 + 75 \times 0,2^n$

  $= 75$ car: $0,2 \in]0;1[$.

- $\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} 75 - 75 \times 0,2^n$

  $= 75$ car: $0,2 \in]0;1[$.

Ainsi, à long terme: 50% des effectifs suivra le programme A et 50% des effectifs suivra le programme B. Les effectifs seront donc équirépartis entre les deux programmes: ils s'équilibreront entre les deux programmes.

Partie B:

1. a. **Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?**

Cet enfant est inscrit à l'association ssi: $k = 3$.

Or: • $S = 1 + 1 + 8 + 3 \times (1 + 3) = 22$,

• en divisant 22 par 10, le reste obtenu est $k = 2$.

Ainsi, comme: $k = 2$ et $2 \neq 3$, le numéro 111383 ne peut pas être celui d'un enfant inscrit à l'association.

1. b. L'erreur sera-t-elle détectée ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer S_1 (associée à $08C_3C_4C_5k$) et S_2 (associée à $11C_3C_4C_5k$).

- $S_1 = 0 + C_3 + C_5 + 3\,(8 + C_4)$ => $S_1 = C_3 + C_5 + 3\,C_4 + 24$.
- $S_2 = 1 + C_3 + C_5 + 3\,(1 + C_4)$ => $S_2 = C_3 + C_5 + 3\,C_4 + 4$.

Or: $S_1 = S_2 + 2 \times 10$ <=> $S_1 \equiv S_2\,[10]$.

Donc S_1 et S_2 sont congrus l'un à l'autre modulo " 10 ".

Ainsi: la clé " k " est la même pour S_1 et S_2 et par conséquent l'erreur ne sera pas détectée.

2. a. Montrons le:

- Quand on a " $C_1C_2C_3C_4C_5k$ ": $S_1 = C_1 + C_3 + C_5 + a \times (C_2 + C_4)$.
- Quand on a " $C_1C_2C_4C_3C_5k$ ": $S_2 = C_1 + C_4 + C_5 + a \times (C_2 + C_3)$.

Dans ces conditions, la clé ne détectera pas l'erreur d'interversion des chiffres C_3 et C_4 ssi:

$$S_1 \equiv S_2\,[10] \iff C_3 + a \times (C_2 + C_4) \equiv C_4 + a \times (C_2 + C_3)\,[10]$$

$$\iff C_3 + a \times C_4 \equiv C_4 + a \times C_3\,[10]$$

$$\iff (C_3 - C_4) + a \times (C_4 - C_3) \equiv 0\,[10]$$

$$\Rightarrow (a - 1)\,(C_4 - C_3) \equiv 0\,[10].$$

Au total: la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion ssi:

$(a - 1)\,(C_4 - C_3)$ est congru à 0 modulo " 10 ".

2. b. Déterminons les entiers " n " demandés:

Pour répondre à cette question, nous allons dresser un tableau qui donne les restes de la division de $n \cdot p$ par 10.

Pour tout entier naturel $n \in [0; 9]$ et tout entier naturel $p \in [1; 9]$, nous avons:

p \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Au total les entiers n demandés compris entre 0 et 9 sont:

$$n = 0, n = 2, n = 4, n = 5, n = 6 \text{ et } n = 8.$$

2. c. Déduisons-en les valeurs de l'entier " a " qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres C_3 et C_4:

Nous savons que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion ssi:

$$(a - 1) \cdot (C_4 - C_3) \equiv 0 \, [10].$$

Or: $n \cdot p \equiv 0 \, [10]$ quand $n = 0, 2, 4, 5, 6, 8$.

$n \in \{0; 2; 4; 5; 6; 8\} \iff (a - 1) \in \{0; 2; 4; 5; 6; 8\}$

$\iff a \in \{1; 3; 5; 6; 7; 9\}$.

Donc la clé ne détecte pas l'erreur quand: $a \in \{1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9\}$.

Ainsi, la clé détecte systématiquement l'erreur quand: $a \in \{2 ; 4 ; 8\}$.

Au total, les valeurs de l'entier " a " qui permettent grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres C_3 et C_4 sont:

$$a = 2,\ a = 4 \text{ et } a = 8.$$