Maths Complémentaires Terminale

Suites Numériques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SUITE, f ET LIMITE

CORRECTION

1. **Étudions le sens de variation de la suite (U_n) en passant par une fonction f que l'on déterminera:**

Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par: $f(x) = 5 + \dfrac{3}{2x+1}$. $\left(5 + \dfrac{u}{v}\right)$

f est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et nous avons pour tout x appartenant à $[\,0\,;+\infty\,[$:

$$f'(x) = 0 + \frac{0 \times (2x+1) - 3 \times (2)}{(2x+1)^2} \quad \text{cad} \quad \boldsymbol{f'(x) = \frac{-6}{(2x+1)^2} < 0.}$$

$$\left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right)$$

Sur $[\,0\,;+\infty\,[$, f est donc: strictement décroissante.

Nous pouvons alors dresser le tableau de variations suivant:

x	0	$+\infty$
f'	$-$	
f	a ↘	b

, avec:

- $a = f(0) = 8$
- $b = ?$

D'après le cours: " lorsque $U_n = f(n)$, f étant une fonction définie sur $[0; +\infty[$, les variations de la suite (U_n) suivent celles de f. "

Ici, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: $U_n = 5 + \frac{3}{2n+1}$

ou encore: $f(n) = 5 + \frac{3}{2n+1}$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: la suite (U_n) a le même sens de variation que la fonction f définie sur $[0; +\infty[$.

La suite (U_n) est donc: strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

2. Conjecturons la limite de la suite:

Nous avons:
- $U_0 = 5 + \frac{3}{1}$
- $U_1 = 5 + \frac{3}{3}$
- $U_2 = 5 + \frac{3}{5}$
- $U_3 = 5 + \frac{3}{7}$
- $U_4 = 5 + \frac{3}{9}$.

Comme $\frac{3}{9} < \frac{3}{7} < \frac{3}{5} < \frac{3}{3} < \frac{3}{1}$: la suite (U_n) semble tendre vers 5.

Et nous pouvons écrire: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = b = 5$.

3. Déterminons le plus petit entier " a " tel que $| U_a - 5 | \leq 0,1\%$:

$$|U_a - 5| \leqslant 0,1\% \iff \frac{3}{2a+1} \leqslant 0,001 \qquad \left(\text{car: } \frac{3}{2a+1} > 0\right)$$

$$\iff 3 \leqslant 0,002a + 0,001$$

$$\iff a \geqslant 1499,5.$$

Ainsi le plus petit entier " a " tel que $|U_a - 5| \leqslant 0,1\%$ est: $a = 1500$.

(car: $a \in \mathbb{N}$)