www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

MAYOTTE, RÉUNION
2023

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES C A B B C

1. Pour tout $x \in IR$, $f(x) = 2xe^x$ et l'équation $f(x) = -\frac{73}{100}$ admet...

Ici: • $f(x) = 2xe^x$

• $\mathcal{D}f = IR$.

• Etudions le signe de f' et les variations de f sur IR:

Ici f est dérivable sur IR comme produit de deux fonctions dérivables sur IR.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in IR$.

Pour tout $x \in IR$: $f'(x) = (2 \times e^x) + (2xe^x)$

$$= (2 + 2x)\, e^x.$$

Dans ces conditions, distinguons deux cas pour tout $x \in IR$.

1[er] cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff (2 + 2x)\, e^x \leqslant 0$

$\iff 2 + 2x \leqslant 0$ car $e^x > 0$ pour tout $x \in IR$

cad $x \leqslant -1$ ou $x \in]-\infty ; -1]$.

2^e cas : $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff (2 + 2x)\, e^x \geqslant 0$

$\iff 2 + 2x \geqslant 0$ car $e^x > 0$ pour tout $x \in IR$

cad $x \geqslant -1$ ou $x \in [-1 ; +\infty[$.

Ainsi : • f est décroissante sur $]-\infty ; -1]$,

• f est croissante sur $[-1 ; +\infty[$.

• **Application du Corollaire du TVI :**

Sans développer, d'après le Corollaire du TVI, l'équation $f(x) = -\dfrac{73}{100}$ admettra une solution dans $]-\infty ; -1[$ et une solution dans $]-1 ; +\infty[$.

Le nombre de solutions sur IR de $f(x) = -\dfrac{73}{100}$ est égal à : 2.

2. Pour tout $x \in IR$, $g(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$ et limite de g en $-\infty$...

Ici : • $g(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$

• $\mathcal{D}g = IR$.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} (x+1) \times \frac{1}{e^x}.$$

Or : • $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty.$

Ainsi: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \times +\infty = -\infty.$

3. Pour tout $x \in IR$, $h(x) = (4x - 16)\, e^{2x}$ et $\mathcal{C}_h$ possède...

Ici: • $h(x) = (4x - 16)\, e^{2x}$

• $\mathcal{D}h = IR.$

La fonction h est deux fois dérivable sur IR comme produit de deux fonctions dérivables sur IR.

Par conséquent, nous pouvons calculer h' et h" pour tout $x \in IR$.

• $h'(x) = [\, 4 \times e^{2x}\,] + [\,(4x - 16) \times 2 \times e^{2x}\,]$

$= (8x - 28)\, e^{2x}.$

• $h''(x) = [\, 8 \times e^{2x}\,] + [\,(8x - 28) \times 2 \times e^{2x}\,]$

$= (16x - 48)\, e^{2x}$

$= 16\, e^{2x}\,(x - 3).$

Dans ces conditions, la fonction h" s'annule et change de signe quand:

$$x - 3 = 0 \quad \text{cad} \quad x = 3.$$

Or d'après le cours, si **h"** s'annule et change de signe en **a** alors $\mathcal{C}_h$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = a$.

Au total, sur $\mathbb{R}$ la courbe $\mathscr{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x = 3$.

4. Sur $]0; +\infty[$, $k(x) = 3\ln(x) - x$ et une équation de T est...

L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_k$ au point A $(e; f(e))$ s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

cad: $y = f'(e) \times (x - e) + f(e)$.

Or ici: • $f(x) = 3\ln(x) - x$, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

• $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 1$, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

• $f(e) = 3 - e$,

• $f'(e) = \dfrac{3}{e} - 1$.

Dans ces conditions: $y = \left(\dfrac{3}{e} - 1\right) \times (x - e) + (3 - e)$

cad: $y = \left(\dfrac{3}{e} - 1\right)x$ ou $y = \left(\dfrac{3 - e}{e}\right)x$.

Une équation de T est donc: $y = \left(\dfrac{3 - e}{e}\right)x$.

5. Le nombre de solutions de $(\ln(x))^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$ est égal à...

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: $(\ln(x))^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$

$\iff X^2 + 10X + 21 = 0$ avec $X = \ln(x)$.

Soit l'équation: $X^2 + 10X + 21 = 0$. $(aX^2 + bX + c = 0)$

Calcul du discriminant:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 100 - 84$

$= 16 > 0$.

Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, **l'équation admet deux solutions distinctes**:

$$\bullet\ X_1 = \frac{-10-4}{2} = -7$$

$$\bullet\ X_2 = \frac{-10+4}{2} = -3.$$

D'où: • $x_1 = e^{-7} \in]0; +\infty[$

• $x_2 = e^{-3} \in]0; +\infty[$.

Le nombre de solutions est donc égal à: 2.