

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Bernoulli & binomiale



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

PILE C'EST PAS FACE !

CORRECTION

1. Donnons la loi de la variable aléatoire discrète X :

Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer n fois une pièce de monnaie.

Soient les événements P = " Pile apparaît à l'issue du lancer ", et \bar{P} = " Face apparaît à l'issue du lancer ".

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où " Pile " apparaît lors de ces n lancers.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: P et \bar{P} .

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de P suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = n$ et $p = \frac{1}{2}$ (il y a une chance sur deux d'obtenir Pile).

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(n; \frac{1}{2})$.

2. Déterminons la probabilité d'obtenir k fois " Pile " lors des n lancers:

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k , $0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Or ici: $p = \frac{1}{2}$.

D'où la probabilité d'obtenir k fois " Pile " lors des n lancers est:

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-k)} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

3. Calculons $E(X)$ et $V(X)$:

D'après le cours: • $E(X) = n \cdot p$

• $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$.

Donc ici nous avons: • $E(X) = n \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{n}{2},$$

$$\bullet V(X) = n \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{4}.$$

4. Calculons $P(A)$ pour $n = 3$:

$$P(A) = P(\text{"obtenir 1 fois pile"})$$

$$= P(X = 1)$$

$$= \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(3-1)}$$

$$= \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3!}{1!(3-1)!}\right) \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{3}{8}.$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir 1 fois pile est égale à: $\frac{3}{8}$.

5. Calculons $P(B)$ pour $n = 3$:

$$P(B) = P(\text{"obtenir 2 fois pile"})$$

$$= P(X = 2) + P(X = 3), \text{ car: } n = 3$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-2)} + \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-3)} \\
&= \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
&= \left(\frac{3!}{2!(3-2)!}\right) \left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} \\
&= \frac{4}{8}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir au moins 2 fois pile est égale à: $\frac{1}{2}$.

6. Calculons $P(C)$ pour $n = 7$:

$$P(C) = P(\text{"obtenir 3 fois pile"})$$

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \binom{7}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{7}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{7}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{7}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$= 1 \times \left(\frac{1}{128}\right) + 7 \times \left(\frac{1}{128}\right) + \left(\frac{7!}{2!(7-2)!}\right) \times \left(\frac{1}{128}\right) + \left(\frac{7!}{3!(7-3)!}\right) \times \left(\frac{1}{128}\right)$$

$$= \frac{8}{128} + \left(\frac{42}{2}\right) \times \left(\frac{1}{128}\right) + \left(\frac{210}{6}\right) \times \left(\frac{1}{128}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir au plus 3 fois pile est égale à: $\frac{1}{2}$.