Maths Complémentaires Terminale

Bernoulli & binomiale

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

COMMISSIONS CHEZ AUCHAN

CORRECTION

1. Déterminons la probabilité qu'il obtienne au moins une carte gagnante:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **distribuer au hasard 15 cartes au client**: la distribution d'une carte est assimilable à un tirage avec remise.

Soient les événements **G** = " la carte est gagnante ", et $\overline{G}$ = " la carte n'est pas gagnante ".

On désigne par **Y** la variable aléatoire égale au nombre de cartes gagnantes sur les 15 cartes distribuées.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 15 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: **G** et $\overline{G}$.

La variable aléatoire discrète Y représentant le nombre de réalisations de **G** suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 15$ **et** $p = 0,5\%$.

Ici, il s'agit de calculer: $P(Y \geq 1)$, avec $Y \rightsquigarrow B(15\,;\,0,5\%)$.

Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0)$

$$= 1 - \binom{15}{0} (0,5\%)^0 \, (99,5\%)^{15}$$

$$\Rightarrow P(Y \geqslant 1) \approx 0,07 \quad (\text{calculatrice}).$$

Au total, la probabilité que le client obtienne au moins une carte gagnante est d'environ: 7%.

2. **Déterminons à partir de quel montant d'achats, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est supérieure à 50%:**

Cela revient à déterminer " n " tel que:

$$P(Y \geqslant 1) \geqslant 50\%, \text{ avec } Y \rightsquigarrow B(n; 0,5\%).$$

$P(Y \geqslant 1) \geqslant 50\% \iff 1 - P(Y = 0) \geqslant 50\%$

$$\iff 1 - \binom{n}{0} (0,5\%)^0 \, (99,5\%)^n \geqslant 50\%$$

$$\iff (99,5\%)^n \leqslant 50\%, \quad \text{car: } \binom{n}{0} = 1$$

$$\iff n \times \ln(99,5\%) \leqslant \ln(50\%)$$

$$\Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(50\%)}{\ln(99,5\%)} \quad \text{car: } 99,5\% \in \,]0; 1[$$

cad $n \geqslant 139$, car: n est un entier naturel.

Au total: c'est à partir de 139 x 10 € = 1390 € d'achats, que la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante sera supérieure à 50%.