

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Bernoulli & binomiale



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ATTEINDRE LA CIBLE

CORRECTION

1. Calculons la probabilité qu'il atteigne la cible au moins 4 fois:

Soit l'expérience aléatoire consistant, pour le tireur, à tirer 10 fois avec son revolver.

La probabilité, pour le tireur, d'atteindre la cible est de 40%.

Soient les événements C = " le tireur atteint la cible ", et \bar{C} = " le tireur n'atteint pas la cible ".

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la cible est atteinte par le tireur.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 6 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: C et \bar{C} .

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de C suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 10$ et $p = 40\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(10; 40\%)$.

- Dans ces conditions, il s'agit de calculer ici: $P(X \geq 4)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k , $0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Or ici: $n = 10$ et $p = 40\%$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - P(X \leq 3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \binom{10}{0} (0,4)^0 \cdot (0,6)^{10} + \binom{10}{1} (0,4)^1 \cdot (0,6)^9 \\ &\quad + \binom{10}{2} (0,4)^2 \cdot (0,6)^8 + \binom{10}{3} (0,4)^3 \cdot (0,6)^7 \\ &= 1 \times (0,6)^{10} + 10 \times (0,4) \times (0,6)^9 + 45 \times (0,4)^2 \times (0,6)^8 \\ &\quad + 120 \times (0,4)^3 \times (0,6)^7 \\ &\approx 0,384. \end{aligned}$$

Donc: $P(X \geq 4) \approx 1 - 0,384 \approx 0,616$.

Ainsi, la probabilité que le tireur atteigne au moins 4 fois la cible est d'environ: **61,6%**.

2. Déterminons le nombre de fois nécessaires pour que la probabilité que le tireur atteigne au moins une fois la cible soit supérieure à 0,90:

- Soit n le nombre de tirs recherché.

Ici la variable aléatoire discrète X suit une loi binomiale de paramètres $n = n$ et $p = 40\%$: $X \sim B(n; 40\%)$.

Dans ces conditions, déterminer la probabilité pour que le tireur atteigne au moins une fois la cible revient à calculer: $P(X \geq 1)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} (0,4)^0 \cdot (0,6)^n \\ &= 1 - (0,6)^n. \end{aligned}$$

- Pour répondre à la question, nous devons donc résoudre l'inéquation:

$$P(X \geq 1) \geq 0,90.$$

$$P(X \geq 1) \geq 0,90 \Leftrightarrow 1 - (0,6)^n \geq 0,90$$

$$\Leftrightarrow (0,6)^n \leq 0,1$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,6) \leq \ln(0,1)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,6)}$$

cad $n \geq 4,507$ ou encore $n = 5$.

La probabilité que le tireur atteigne une fois la cible est supérieure à 0,90 ssi: le nombre de tirs est supérieur ou égal à 5.