BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

MAYOTTE, RÉUNION

2022

FEMME ET CADRE

CORRECTION

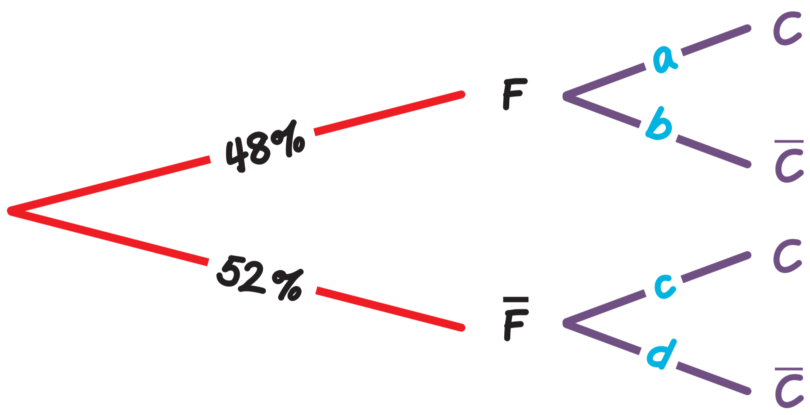
1. Représentons la situation par un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- F = " la personne choisie est une femme ".
- $\overline{F}$ = " la personne choisie est un homme ".
- C = " la personne choisie est cadre ".
- $\overline{C}$ = " la personne choisie n'est pas cadre ".
- $P(F) = 48\%$
- $P(\overline{F}) = 1 - 48\% = 52\%$.
- $P(C) = ?$
- $P(\overline{C}) = ?$
- $P_F(C) = 16,5\%$
- $P_F(\overline{C}) = 1 - 16,5\% = 83,5\%$.

- $P_{\overline{F}}(C) = 21,5\%$
- $P_{\overline{F}}(\overline{C}) = 1 - 21,5\% = 78,5\%.$

D'où l'arbre de probabilités complété est le suivant:



, avec:

- $a = 16,5\%$
- $b = 83,5\%$
- $c = 21,5\%$
- $d = 78,5\%$

2. Calculons la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre:

Ici, nous devons calculer: $P(F \cap C)$.

$$P(F \cap C) = P_F(C) \times P(F)$$

$$= 16,5\% \times 48\%$$

$$= 0,0792.$$

Ainsi la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre est donc égale à: $0,0792$ cad $7,92\%$.

3. a. Montrons que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à $0,191$:

Ici, il s'agit de calculer: **$P(C)$**.

L'événement $C = (C \cap F) \cup (C \cap \overline{F})$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(C) = P(C \cap F) + P(C \cap \overline{F})$$
$$= P(F \cap C) + P_{\overline{F}}(C) \times P(\overline{F})$$
$$= 0,0792 + 21,5\% \times 52\%$$
$$= 0,191.$$

Ainsi la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est donc bien égale à: 0, 191 cad 19, 1%.

3. b. Les événements F et C sont-ils indépendants ?

D'après le cours, les événements F et C sont indépendants ssi:

$$P(F \cap C) = P(F) \times P(C).$$

Or ici:
- $P(F \cap C) = 0,0792$
- $P(F) = 48\%$
- $P(C) = 0,191.$

Comme $P(F) \times P(C) = 0,0916 \neq 0,0792$, les événements F et C ne sont pas indépendants.

4. Calculons $P_C(F)$ et interprétons le résultat obtenu:

$$P_C(F) = \frac{P(C \cap F)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(F \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{0,0792}{0,191}$$

$$= 0,4147.$$

Cela signifie que la probabilité de choisir une femme sachant qu'elle est cadre est égale à : **0, 4147** **cad** **41, 47%**.

5. a. Justifions que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres :

Soit l'expérience aléatoire consistant à **interroger au hasard un échantillon de 15 salariés** : le grand nombre de salariés permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.

Soient les événements **C** = " la personne choisie est cadre ", et $\overline{C}$ = " la personne choisie n'est pas cadre ".

On désigne par **X** la variable aléatoire qui donne le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 15 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles : C et $\overline{C}$.

La variable aléatoire discrète **X** représentant le nombre de réalisations de **C** suit donc **une loi binomiale** de paramètres : $n = 15$ **et** $p = 0,191$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(15\,;\,0,191)$.

5. b. Calculons la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre:

Il s'agit de calculer ici: $P(X \leqslant 1)$, avec $X \rightsquigarrow B(15\,;\,0,191)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Or: $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= \binom{15}{0}(0,191)^0\,(1-0,191)^{15} + \binom{15}{1}(0,191)^1\,(1-0,191)^{14}$$

$$= (1-0,191)^{15} + 15 \times 0,191 \times (1-0,191)^{14}$$

$$\approx 0,189 \quad (\text{calculatrice}).$$

Au total, la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre est d'environ: 18,9%.

5. c. Calculons E (X):

D'après le cours: $E(X) = n \cdot p$.

Donc ici nous avons: $E(X) = 15 \times 0,191$

$$= 2,865 \text{ salariés.}$$

6. Valeur minimale de " n ", avec $X \leadsto B(n ; 0,191)$?

Répondre à cette question revient à déterminer l'entier naturel " n " tel que:

$$P(X \geq 1) \geq 0,99, \text{ avec } X \leadsto B(n ; 0,191).$$

$$P(X \geq 1) \geq 0,99 \iff 1 - P(X = 0) \geq 0,99$$

$$\iff 1 - \binom{n}{0}(0,191)^0(1 - 0,191)^n \geq 0,99$$

$$\iff 1 - (1 - 0,191)^n \geq 0,99$$

$$\iff (1 - 0,191)^n \leq 1\%$$

$$\iff n \times \ln(1 - 0,191) \leq \ln(0,01)$$

$$\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(1 - 0,191)} \quad \text{car: } 1 - 0,191 \in]0 ; 1[$$

cad $n \geq 22$ car n est un entier naturel.

Ainsi, la valeur minimale de n pour que l'échantillon soit supérieur ou égal à 99% est: $n = 22$ salariés.