BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

MAYOTTE, RÉUNION
2023

DÉCROCHER LE TÉLÉPHONE

CORRECTION

PARTIE A

1. Recopions et complétons l'arbre pondéré :

D'après l'énoncé, nous avons :

- D_1 = " la personne décroche au 1er appel ".
- D_2 = " la personne décroche au 2e appel ".
- A = " la personne achète le produit ".
- $\overline{A}$ = " la personne n'achète pas le produit ".

- $P(D_1) = 1 - 0,6 = 0,4$
- $P(\overline{D_1}) = 0,6.$

- $P_{D_1}(A) = 0,3$
- $P_{D_1}(\overline{A}) = 1 - 0,3 = 0,7.$

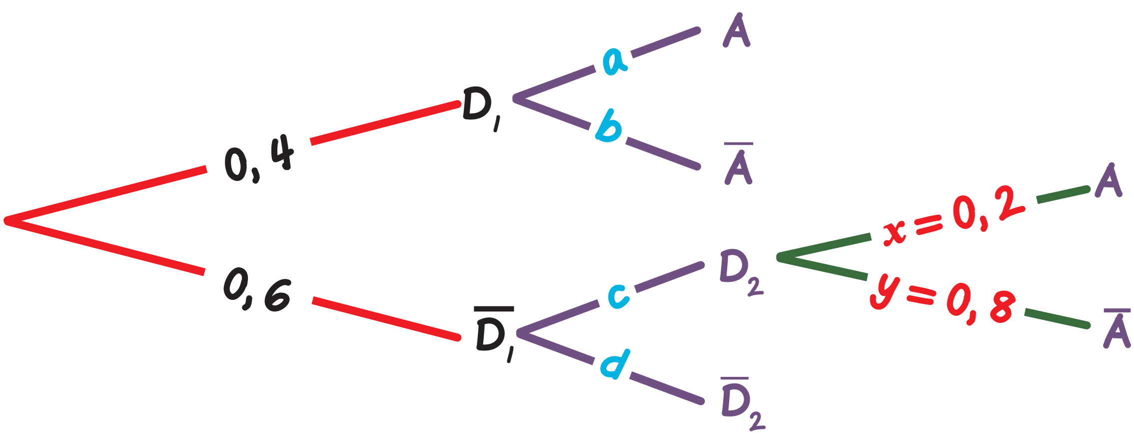
- $P(D_2) = 1 - 0,3 = 0,7$

- $P(\overline{D_2}) = 0,3.$

- $P_{D_2}(A) = 0,2$

- $P_{D_2}(\overline{A}) = 1 - 0,2 = 0,8.$

D'où l'arbre de probabilités complété est le suivant:



, avec:

- $a = 0,3$
- $b = 0,7$
- $c = 0,7$
- $d = 0,3$

2. Montrons que $P(A) = 0,204$:

Ici, il s'agit de calculer: **$P(A)$.**

L'événement $A = (A \cap D_1) \cup (A \cap \overline{D_1} \cap D_2).$

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(A) = P(A \cap D_1) + P(A \cap \overline{D_1} \cap D_2)$$

$$= P_{D_1}(A) \times P(D_1) + 0,2 \times 0,6 \times 0,7$$

$$= 0,3 \times 0,4 + 0,084$$

$$= 0,204.$$

Ainsi, la probabilité que la personne achète le produit est de:

$$0,204 \text{ cad } 20,4\%.$$

3. Calculons la probabilité que la personne ait décroché au 1er appel sachant qu'elle a acheté le produit:

Cela revient à déterminer: $P_A(D_1)$.

$$P_A(D_1) = \frac{P(A \cap D_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(D_1 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P_{D_1}(A) \times P(D_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{0,3 \times 0,4}{0,204}$$

$$\approx 0,588.$$

Ainsi, la probabilité que la personne ait décroché au 1er appel sachant qu'elle a acheté le produit est d'environ: $0,588$ cad $58,8\%$.

PARTIE B

1. a. Donnons sans justifier, les paramètres de la loi binomiale suivie par X:

La variable aléatoire discrète X, qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit, suit une loi binomiale de paramètres:

$$n = 30 \text{ et } p = 0,204.$$

Et nous pouvons noter: $X \leadsto B(30 ; 0,204)$.

1. b. Déterminons la probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit:

Déterminer la probabilité demandée revient à calculer:

$$P(X = 6), \text{ avec } X \leadsto B(30 ; 0,204).$$

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X = 6) = \binom{30}{6} (0,204)^6 (1 - 0,204)^{24}$

$$\approx 0,179 \quad (\text{calculatrice}).$$

Au total, la probabilité qu'exactement 6 personnes achètent le produit est d'environ: $0,179$ cad $17,9\%$.

1. c. Calculons E (X) et interprétons le résultat:

D'après le cours: $E(X) = n \cdot p$.

Ici, nous avons donc: $E(X) = 30 \times 0,204$

$$= 6,12 \text{ personnes.}$$

Ainsi en moyenne, 7 personnes (sur 30) achètent le produit.

2. Déterminons la plus petite valeur recherchée de " n ":

Répondre à cette question revient à déterminer l'entier naturel " n " tel que:

$$P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99, \text{ avec } X \rightsquigarrow B(n; 0,204).$$

$$P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - P(X < 1) \geqslant 0,99$$

$$\iff 1 - P(X = 0) \geqslant 0,99$$

$$\iff 1 - \binom{n}{0}(0,204)^0(1 - 0,204)^n \geqslant 0,99$$

$$\iff (1 - 0,204)^n \leqslant 0,01$$

$$\iff n \times \ln(1 - 0,204) \leqslant \ln(0,01)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(1 - 0,204)} \quad \text{cad} \quad n \geqslant 21 \text{ personnes.}$$

Ainsi, $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$ quand: $X \rightsquigarrow B(21; 0,204)$.