Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MARDI 19 JUIN 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 2 (5 points) Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Franck joue en ligne sur internet.

Partie A

Après plusieurs semaines, des statistiques données par le logiciel lui permettent de dire que :
- quand il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,65 ;
- quand il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,42.

On note G l'état : "Franck gagne la partie" et P l'état : "Franck perd la partie".

Sur une période donnée, on note, pour tout entier naturel n non nul :
- g_n la probabilité que Franck gagne la n-ième partie ;
- p_n la probabilité que Franck perde la n-ième partie.

Dans cette période, Franck a gagné la première partie.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets notés G et P.
2. a) Écrire la matrice de transition M dans l'ordre G-P.
   b) Calculer la probabilité que Franck gagne la troisième partie.
3. Déterminer l'état stable du système et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

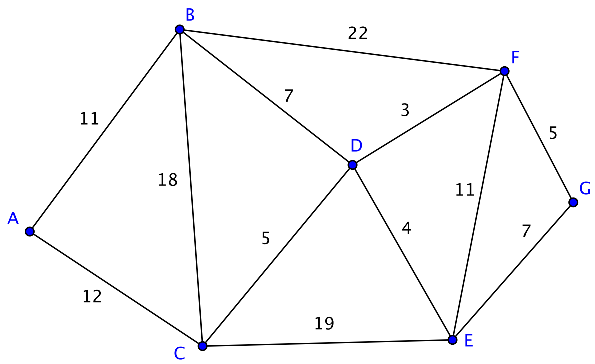
Partie B

Dans ce jeu vidéo, Franck circule dans des catacombes infestées de monstres qu'il doit combattre.

On a représenté ci-contre le graphe modélisant ces catacombes.

Les sommets représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs.

Les étiquettes du graphe correspondent au nombre de monstres présents dans chaque couloir.



1. a) Justifier qu'il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.
   b) Donner un tel chemin.
2. Franck débute le jeu dans la salle A et doit atteindre l'adversaire final en salle G.
   Existe-t-il un chemin permettant de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs ?
3. Une fois arrivé en salle G, Franck souhaite revenir en salle A en affrontant le moins de monstres possible afin de recommencer une nouvelle partie.
   Déterminer ce trajet minimal et préciser le nombre de monstres affrontés.

EXERCICE 2

[Antilles-Guyane 2018]

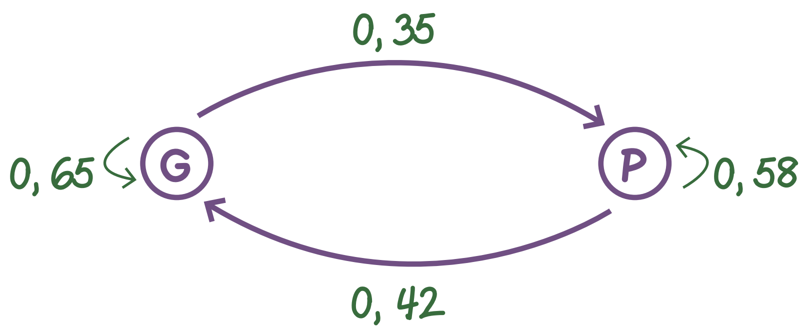
Partie A:

1. Représentons cette situation par un graphe probabiliste:

Soient: • G, l'état: " Franck gagne la partie ",

• P, l'état: " Franck perd la partie ".

Le graphe probabiliste est le suivant:



2. a. Écrivons la matrice de transition M dans l'ordre G-P:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,42 & 0,58 \end{pmatrix}.$$

2. b. Calculons la probabilité que Franck gagne la troisième partie:

Il s'agit ici de calculer g_3.

Pour cela nous devons calculer: $P_3 = (g_3 \quad p_3)$.

D'après le cours: $P_3 = P_1 \times M^{(3-1)}$ cad $P_3 = P_1 \times M^2$.

Or: $P_1 = (1 \quad 0)$, car: Franck a gagné la première partie.

D'où: $P_3 = (1 \quad 0) \times M^2$

$$= (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,42 & 0,58 \end{pmatrix}^2$$

$$= (56,95\% \quad 43,05\%).$$

Donc: $g_3 = 56,95\%$ et $p_3 = 43,05\%$.

Au total, la probabilité que Franck gagne la troisième partie est de:

56, 95%.

3. Déterminons l'état stable du système et interprétons:

A long terme, l'état P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial P_1.

Nous allons donc déterminer $P = (g \quad p)$.

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

Soit $P = (g \quad p)$, $P = P \times M \iff (g \quad p) = (g \quad p) \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,42 & 0,58 \end{pmatrix}$

$$\iff (g \quad p) = (0,65\,g + 0,42\,p \quad 0,35\,g + 0,58\,p)$$

$$\iff \begin{cases} 0,65g + 0,42p = g \\ 0,35g + 0,58p = p \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -0,35g + 0,42p = 0 \\ g + p = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} g = \dfrac{6}{11} \\ p = \dfrac{5}{11} \end{cases}, \text{ et donc: } \quad P = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{11} & \dfrac{5}{11} \end{pmatrix}.$$

Au total, l'état stable du système est: $P = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{11} & \dfrac{5}{11} \end{pmatrix}$.

Cela signifie qu'après n parties (" n très grand "), la probabilité de gagner pour Franck sera de $\dfrac{6}{11}$ et celle de perdre de $\dfrac{5}{11}$.

Partie B:

1. a. Justifions qu'il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois:

Cela revient à déterminer si le graphe admet **une chaîne eulérienne**.

D'après le cours:

Le graphe étant connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Zéro ou deux sommets (et deux seulement) X et Y du graphe sont de degré impair.
- Le graphe admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.

Or ici: **le graphe (d'ordre 7) est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.**

Et, nous avons le tableau des sommets degrés suivant:

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	2	4	4	4	4	4	2

(degré d'un sommet = nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité)

Comme il n'y a aucun sommet de degré impair, d'après le **théorème d'Euler**,

le graphe admet une chaîne eulérienne.

Donc: **oui**, il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.

1. b. Donnons un tel chemin:

Un exemple pour aller de A à A est:

A – B – F – G – E – F – D – E – C – D – B – C – A.

2. Existe-t-il un chemin permettant de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs ?

Comme dit à la question précédente: oui, il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.

Ceci est dû au fait que le graphe connexe contient un cycle eulérien.

Par conséquent: **oui**, il existe un chemin permettant à Franck de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs.

Notons qu'une **chaîne eulérienne** est une chaîne telle que:

- elle contient toutes les arêtes du graphe,
- chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.

3. **Déterminons le trajet minimal et précisons le nombre de monstres affrontés:**

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet minimal (" **affronter le moins de monstres possibles** ") que doit suivre Franck pour aller de la salle G à la salle A: le trajet G – F – D – C – A.

Et durant ce trajet minimal, Franck affrontera: $5 + 3 + 5 + 12 = 25$ monstres.

Au total, le trajet minimal que Franck doit suivre pour aller de G à A, tout en affrontant le moins de monstres possible est:

G – F – D – C – A, et il affrontera **25 monstres**!