Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE n°4 (6 points)

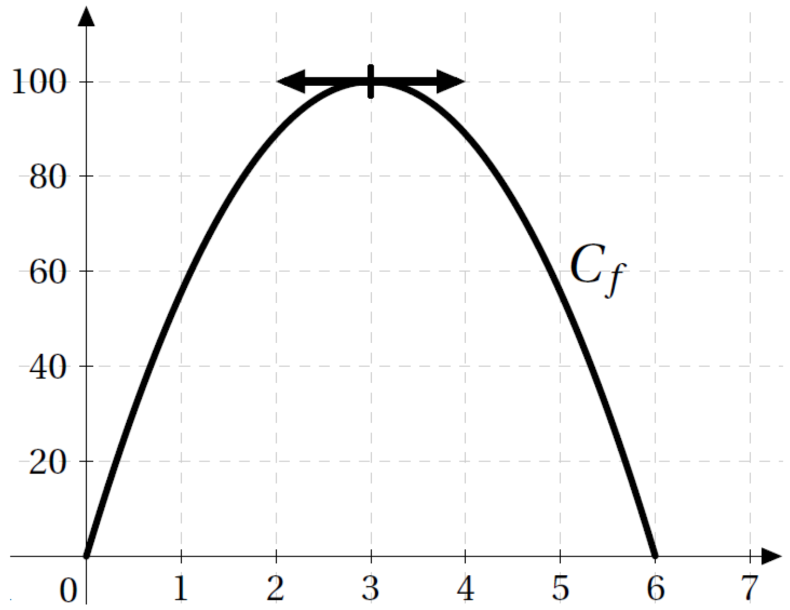
On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *saturation* ».

On définit aussi la fonction « *envie* » comme la fonction dérivée de la fonction « *satisfaction* ». On dira qu'il y a « *souhait* » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « *rejet* » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « *satisfaction* » différent. Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « *satisfaction* » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heure).



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Lire la durée de travail quotidien menant à « *saturation* ».

2. Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « *rejet* ».

Partie B

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « *satisfaction* » g est définie sur l'intervalle $[0; 30]$ par $g(x) = 12{,}5xe^{-0{,}125x+1}$ (x est exprimé en jour).

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 30]$,

$$g'(x) = (12{,}5 - 1{,}5625x)e^{-0{,}125x+1}.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;30]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.

3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet de « *saturation* » ?

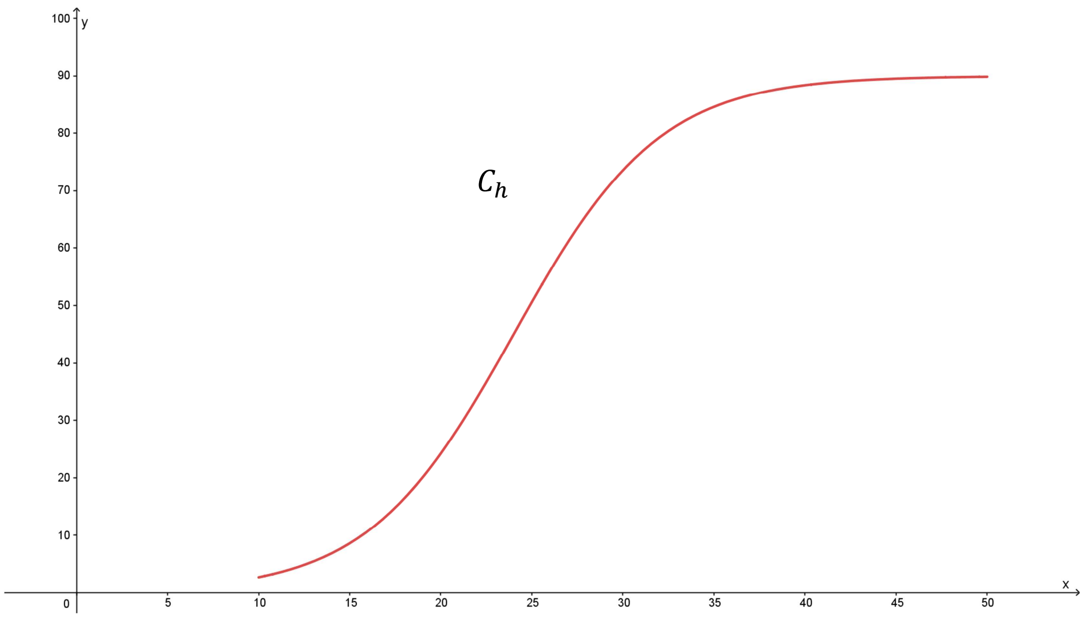
Partie C

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction «*satisfaction* » h, est définie sur l'intervalle $[10; 50]$ par

$$h(x) = \frac{90}{1 + e^{-0{,}25x+6}}$$

(x est exprimé en millier d'euros).

La courbe C_h de la fonction h est représentée ci-dessous :



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver$(90/(1+\exp(-0.25*x+6)))$ $$\frac{22{,}5e^{-0{,}25x+6}}{(1+e^{-0{,}25x+6})^2}$$
2	Dériver$(22.5*\exp(-0.25*x+6)/(1+\exp(-0.25*x+6))^2)$ $$\frac{5{,}625e^{-0{,}25x+6}(e^{-0{,}25x+6}-1)}{(1+e^{-0{,}25x+6})^3}$$

1. Donner sans justification une expression de $h''(x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[10; 50]$ l'inéquation $e^{-0{,}25x+6}-1>0$.
3. Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10; 50]$.
4. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « *envie* » décroît ? Justifier.
5. Déterminer, en le justifiant, pour quel salaire annuel la fonction *« satisfaction »* atteint 80. *Arrondir au millier d'euros.*

EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2018]

Partie A:

1. Déterminons graphiquement la durée de travail quotidien menant à saturation:

D'après l'énoncé, quand la fonction satisfaction atteint la valeur 100, on dit qu'il y a **saturation**.

Or ici: $f(x) = 100$ quand: $x = 3$ heures.

Ainsi: la durée de travail quotidien menant à **saturation** est de **3 heures**.

2. Déterminons graphiquement à partir de quelle durée de travail il y a rejet:

D'après l'énoncé, il y a rejet lorsque la fonction **envie** est strictement négative.

En d'autres termes, il y a rejet à partir du moment où: $f'(x) < 0$.

Or ici: $f'(x) < 0$ à partir de: 3 heures de travail.

Ainsi: à partir de **3 heures de travail** quotidien, il y a **rejet**.

Partie B:

1. Montrons que pour tout $x \in [\,0\,;30\,]$, $g'(x) = (12,5 - 1,5625\,x)\,e^{-0,125x+1}$:

Ici: • $g(x) = 12,5\,x\,e^{-0,125x+1}$ **(u x v)**

• $Dg = [\,0\,;\,30\,]$.

Posons: $g = g_1 \times g_2$, avec: $g_1(x) = 12,5\,x$ et $g_2(x) = e^{-0,125x+1}$.

g est dérivable sur $[\,0\,;\,30\,]$ car g_1 et g_2 sont dérivables sur $[\,0\,;\,30\,]$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in [\,0\,;\,30\,]$.

Pour tout $x \in [\,0\,;\,30\,]$:

$g'(x) = (12,5) \times (e^{-0,125x+1}) + (12,5x) \times (-\,0,125\,e^{-0,125x+1})$ **(u' x v + u x v')**

$= (12,5 - 1,5625\,x)\,e^{-0,125x+1}$.

Au total, nous avons bien, pour tout $x \in [\,0\,;\,30\,]$:

$g'(x) = (12,5 - 1,5625\,x)\,e^{-0,125x+1}$.

2. a. Etudions le signe de g' sur $[\,0\,;\,30\,]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0\,;\,30\,]$.

• **1er cas**: $g'(x) = 0$.

$g'(x) = 0$ ssi $12,5 - 1,5625\,x = 0$, cad: $x = 8$.

• **2ème cas**: $g'(x) < 0$.

$g'(x) < 0$ ssi $12,5 - 1,5625\,x < 0$, cad: $x \in]\,8\,;\,30\,]$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,125x+1} > 0$)

• **3ème cas**: $g'(x) > 0$.

$g'(x) > 0$ ssi $12,5 - 1,5625\,x > 0$, cad: $x \in [\,0\,;\,8\,[$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,125x+1} > 0$)

Au total: • g est croissante sur $[0; 8]$,

(car sur $[0; 8]$, $g'(x) \geq 0$)

• g est décroissante sur $[8; 30]$.

(car sur $[8; 30]$, $g'(x) \leq 0$)

2. b. Dressons le tableau de variation de g sur $[0; 30]$:

Sur $[0; 30]$, le tableau de variation de g est le suivant:

x	0		8		30
g'		+	0	-	
g	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = g(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = g(8) \Rightarrow b = 100$,

• $c = g(30) \Rightarrow c = 375\, e^{-2,75} \approx 24$.

3. Déterminons la durée de séjour qui correspond à l'effet saturation:

D'après l'énoncé, quand la fonction satisfaction atteint la valeur 100, on dit qu'il y a **saturation**.

Or ici: $g(x) = 100$ quand: $x = 8$ jours. ($g(8) = 100$)

Ainsi: une durée de séjour de 8 jours mène à **saturation**.

Partie C:

1. Donnons sans justification une expression de $h''(x)$:

D'après le logiciel de calcul: $h''(x) = \dfrac{5,625\, e^{-0,25x+6}\,(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$.

Au total, pour tout $x \in [10 ; 50]$: $h''(x) = \dfrac{5,625\, e^{-0,25x+6}\,(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$.

2. Résolvons dans l'intervalle $[\,10 ; 50\,]$, $e^{-0,25x+6} - 1 > 0$:

$e^{-0,25x+6} - 1 > 0 \iff \ln(e^{-0,25x+6}) > \ln(1)$

$\iff -0,25x + 6 > 0$

$\iff 0,25x < 6$

$\iff x < 24$ cad: $x \in [\,10 ; 24\,[$.

Au total, l'inéquation admet comme solution: $x \in [\,10 ; 24\,[$.

3. Etudions la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[\,10 ; 50\,]$:

Ici: • $h(x) = \dfrac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$

• $Dh = [\,10 ; 50\,]$

• $h''(x) = \dfrac{5,625\, e^{-0,25x+6}\,(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$

Or: • h est convexe ssi: $h''(x) \geqslant 0$,

• h est concave ssi: $h''(x) \leqslant 0$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [\ 10 ; 50\ ]$, sachant que: $e^{-0,25x+6} > 0$.

• 1[er] **cas**: $h''(x) \geq 0$.

$$h''(x) \geq 0 \text{ ssi } \frac{5,625\, e^{-0,25x+6}\,(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3} \geq 0$$

$\iff e^{-0,25x+6} - 1 \geq 0$, cad: $x \in [\ 10 ; 24\ ]$. (d'après question **2.**)

• 2[ème] **cas**: $h''(x) \leq 0$.

$h''(x) \leq 0$ ssi $e^{-0,25x+6} - 1 \leq 0$, cad: $x \in [\ 24 ; 50\ ]$.

Au total: • h est convexe sur $[\ 10 ; 24\ ]$,

• h est concave sur $[\ 24 ; 50\ ]$.

4. Déterminons le salaire annuel à partir duquel la fonction envie décroît:

D'après l'énoncé, la fonction **envie** correspond à la dérivée de la fonction satisfaction.

D'où ici, la fonction **envie** correspond à **h'**.

Or h' décroît dès lors que: $h''(x) \leq 0$

cad quand: $x \geq 24000$ euros.

Ainsi, la fonction **envie** décroît dès que: le salaire annuel dépasse **24000 euros**.

5. Déterminons le salaire annuel pour lequel la satisfaction atteint 80:

La fonction satisfaction correspond ici à: $h(x) = \dfrac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$, avec $x \in [\ 10 ; 50\ ]$.

Dans ces conditions: $h(x) = 80$ ***quand*** $\dfrac{90}{1 + e^{-0,25x+6}} = 80$.

$$\frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}} = 80 \iff 90 = 80\,(1 + e^{-0,25x+6})$$

$$\iff e^{-0,25x+6} = \frac{1}{8}$$

$$\iff \ln(e^{-0,25x+6}) = -\ln(8)$$

$$\iff -0,25x+6 = -\ln(8)$$

$$\iff x = \frac{\ln(8)+6}{0,25} \quad \text{ou:} \quad x = 4\ln(8) + 24.$$

Au total, le salaire annuel pour lequel la satisfaction atteint 80 est de:

$4\ln(8) + 24 \approx 32\,000$ euros.