Corrigé

Exercice 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MERCREDI 20 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire **Coefficient : 7**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

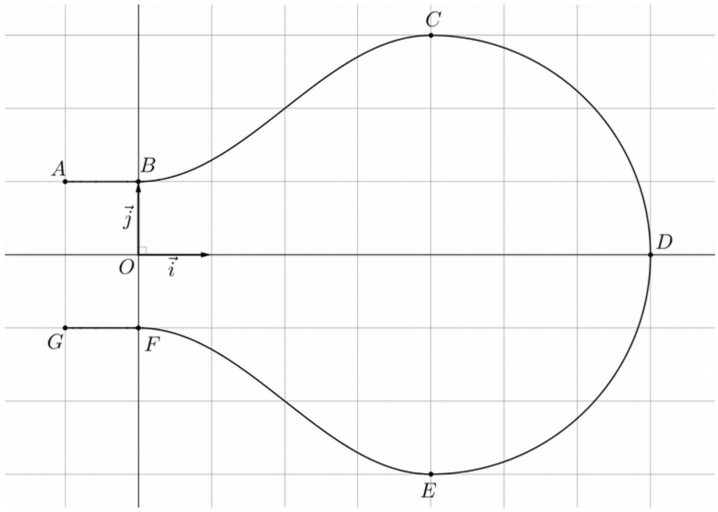
EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on s'intéresse au volume d'une ampoule basse consommation.

Partie A - Modélisation de la forme de l'ampoule

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère les points $A(-1 ; 1)$, $B(0 ; 1)$, $C(4 ; 3)$, $D(7 ; 0)$, $E(4 ; -3)$, $F(0 ; -1)$ et $G(-1 ; -1)$.
On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-dessous :



La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :

- la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante h définie sur l'intervalle $[-1 ; 0]$ par $h(x) = 1$;
- la portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par $f(x) = a + b \sin\left(c + \dfrac{\pi}{4} x\right)$, où a, b et c sont des réels non nuls fixés et où le réel c appartient à l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$;
- la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre $[CE]$.

La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

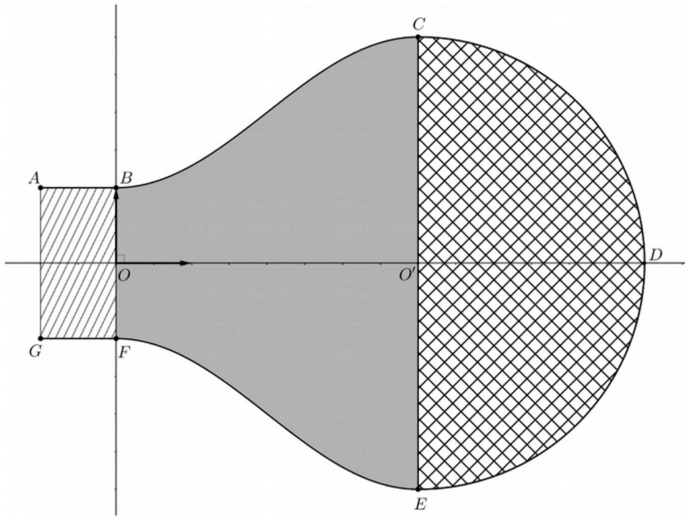
1.a) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$, déterminer $f'(x)$.

b) On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel c.

2. Déterminer les réels a et b.

Partie B - Approximation du volume de l'ampoule

Par rotation de la figure précédente autour de l'axe des abscisses, on obtient un modèle de l'ampoule. Afin d'en calculer le volume, on la décompose en trois parties comme illustré ci-dessous :



Vue dans le plan (BCE)

On rappelle que :

- le volume d'un cylindre est donné par la formule $\pi r^2 h$ où r est le rayon du disque de base et h est la hauteur ;
- le volume d'une boule de rayon r est donné par la formule $\frac{4}{3}\pi r^3$.

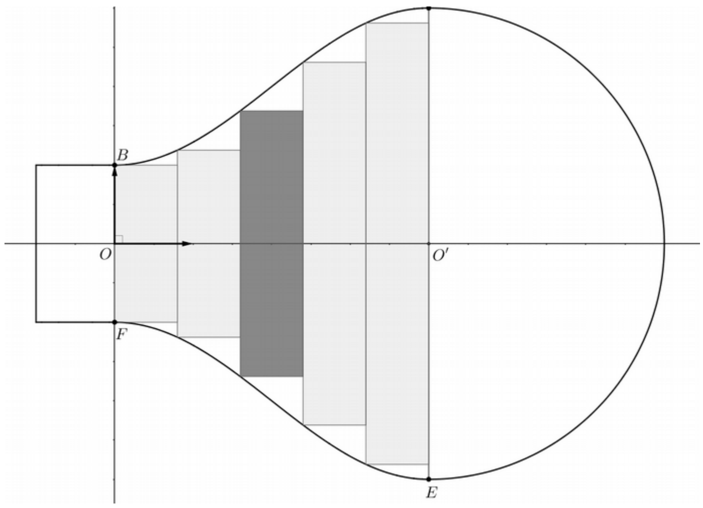
On admet également que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, $f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

1. Calculer le volume du cylindre de section le rectangle $ABFG$.

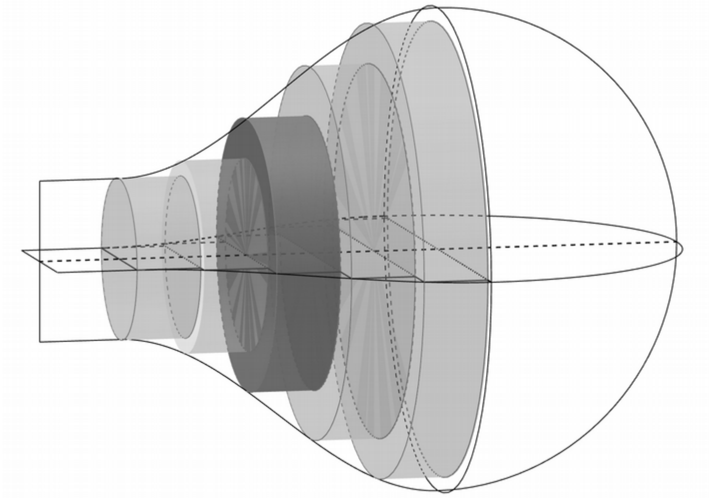
2. Calculer le volume de la demi-sphère de section le demi-disque de diamètre $[CE]$.

3. Pour approcher le volume du solide de section la zone grisée $BCEF$, on partage le segment $[OO']$ en n segments de même longueur $\frac{4}{n}$ puis on construit n cylindres de même hauteur $\frac{4}{n}$.

a) **Cas particulier** : dans cette question uniquement on choisit $n = 5$.
Calculer le volume du troisième cylindre, grisé dans les figures ci-dessous, puis en donner la valeur arrondie à 10^{-2}.



Vue dans le plan (BCE)



Vue dans l'espace

b) **Cas général** : dans cette question, n désigne un entier naturel quelconque non nul.
On approche le volume du solide de section $BCEF$ par la somme des volumes des n cylindres ainsi créés en choisissant une valeur de n suffisamment grande.
Recopier et compléter l'algorithme suivant de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable V contienne la somme des volumes des n cylindres créés lorsque l'on saisit n.

$V \leftarrow 0$
Pour k allant de … à … :
    $V \leftarrow \ldots$
Fin Pour

EXERCICE 2

[Polynésie 2018]

Partie A: Modélisation de la forme de l'ampoule

1\. a. Déterminons f':

Ici: • $f(x) = a + b \sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$, avec: $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

• $Df = [\,0 ; 4\,]$.

Posons: $f = f_1 + f_2$, avec: $f_1(x) = a$ et $f_2(x) = b \sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[\,0 ; 4\,]$.

f_2 est dérivable sur l'intervalle $[\,0 ; 4\,]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[\,0 ; 4\,]$ comme somme $(f_1 + f_2)$ de deux fonctions dérivables sur $[\,0 ; 4\,]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0 ; 4\,]$.

Pour tout $x \in [\,0 ; 4\,]$:

$$f'(x) = \frac{\pi}{4} b \cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right). \qquad \left(\left(\sin[\,U(x)\,]\right)' = U'(x) \cos[\,U(x)\,]\right)$$

Au total, pour tout $x \in [\,0 ; 4\,]$: $f'(x) = \frac{\pi}{4} b \cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$.

1. b. **Déterminons la valeur du réel c:**

Les points B et C ont pour coordonnées respectives: B (0; 1) et C (4; 3).

Comme les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f sont parallèles à l'axe des abscisses, nous avons:

$$f'(B) = 0 \text{ et } f'(C) = 0.$$

Or: $\begin{cases} f'(B) = 0 \\ f'(C) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} b \cos(c) = 0 \\ \dfrac{\pi}{4} b \cos(c + \pi) = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \cos(c) = 0 \\ \cos(c + \pi) = 0 \end{cases}, \text{ car: } b \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} \cos(c) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos(c + \pi) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ c = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Comme $c \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, nous retiendrons: $c = \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, la valeur du réel c est: $c = \dfrac{\pi}{2}$.

Et nous pouvons écrire pour tout $x \in [0; 4]$: $f(x) = a + b \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}x\right)$.

2. Déterminons les réels a et b:

Comme pour tout x [0; 4], $f(x) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)$, nous pouvons écrire:

$$\begin{cases} f(B) = 1 \\ f(C) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Au total, les valeurs des réels a et b sont: $a = 2$ et $b = -1$.

Et nous pouvons écrire pour tout réel x de l'intervalle [0; 4]:

$$f(x) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) \text{ cad: } f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

Partie B: Approximation du volume de l'ampoule

1. Calculons le volume du cylindre de section le rectangle ABFG:

Nous savons que:

- le volume d'un cylindre est donné par la formule $\pi r^2 h$, r étant le rayon du disque de base et h, la hauteur ;
- $r = 1$ et $h = 1$.

Dans ces conditions, le volume du cylindre est: $V_c = \pi$.

Au total, le volume du cylindre est: $V_c = \pi$.

2. Calculons le volume de la demi-sphère de section le disque de diamètre [CE]:

Nous savons que: • le volume d'une boule de rayon r est donnée par la formule $\frac{4}{3}\pi r^3$;

• $r = 3$.

Dans ces conditions, le volume de la boule de rayon $r = 3$ est:

$$V_B = \frac{4}{3}\pi\,(3)^3 = 36\pi.$$

D'où, le volume de la demi-sphère est: $V_S = \frac{V_B}{2} = 18\pi$.

Au total, le volume de la demi-sphère est: $V_S = 18\pi$.

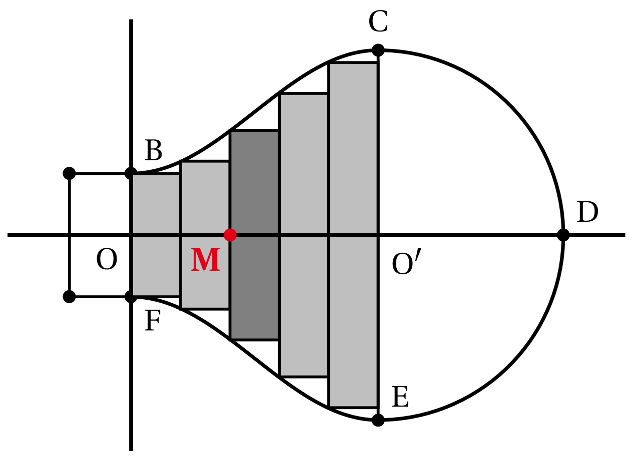
3. a. a1. Calculons le volume du troisième cylindre grisé sachant que $n = 5$:

Ici: • la hauteur h du troisième cylindre est: $h = \frac{OO'}{5} = \frac{4}{5}$;

• soit le point M (voir graphique) dont les coordonnées sont respectivement:

$$\bullet\ x_M = \frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5}$$

$$\bullet\ y_M = 0;$$



• le rayon du troisième cylindre est: $r = f(x_M) = f\left(\frac{8}{5}\right) = 2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Dans ces conditions, le volume du troisième cylindre est:

$$V_{C3} = \pi\, r^2\, h \quad \text{cad:} \quad V_{C3} = \pi \times \left(2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 \times \frac{4}{5}.$$

Ainsi: $V_{C3} = \frac{4\pi}{5}\left(2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2$.

3. a. a2. Une valeur arrondie à 10^{-2} de V_{C3} ?

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons: $V_{C3} \approx 7,19$, à 10^{-2} près.

Ainsi, une valeur arrondie à 10^{-2} de V_{C3} est: 7, 19 unités de volume.

3. b. Recopions et complétons l'algorithme, sachant que $n \in \mathbb{N}^*$:

Dans le cas général, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

• comme hauteur: $h = \frac{4}{n}$;

• comme point M, le point de coordonnées:

  • $x_M = \frac{4}{n} \times k$ (k allant de 0 à (n - 1))

  • $y_M = 0$;

• comme rayon: $r = f(x_M) = f\left(\frac{4}{n} \times k\right) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{n} \times k\right)$.

Dans ces conditions, le volume de chacun des n cylindres est:

$$V_{Cn} = \pi\, r^2\, h \quad \text{cad:} \quad V_{Cn} = \pi \times \left(2 - \cos\left(\frac{\pi}{n} \times k\right)\right)^2 \times \frac{4}{n}.$$

Ainsi: $V_{C_n} = \frac{4\pi}{n}\left(2 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2, n \in \mathbb{N}^*.$

Et l'algorithme recopié et complété s'écrit:

```
V ← 0
Pour k allant de 0 à n - 1:
        V ← V + 4π/n (2 - cos(kπ/n))²
Fin Pour
```