Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément
à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**
   Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

2. On considère la suite u définie, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \frac{1}{n}\,\text{pgcd}(20\,;n)$$

   Proposition 2
   La suite (u_n) est convergente.

3. **Proposition 3**
   Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a $A \times B = B \times A$

4. Un mobile peut occuper deux positions A et B. À chaque étape, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.
   Pour tout entier naturel n, on note :
   - A_n l'événement « le mobile se trouve dans la position A à l'étape n » et a_n sa probabilité.
   - B_n l'événement « le mobile se trouve dans la position B à l'étape n » et b_n sa probabilité.
   - X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

   On admet que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = M \times X_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

   Proposition 4
   La probabilité $\text{P}_{A_n}(B_{n+1})$ vaut $0{,}45$.

   Proposition 5
   Il existe un état initial $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1, autrement dit tel que $b_1 = 3a_1$.

EXERCICE 4

[Polynésie 2016]

1. **Proposition 1**: " Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4 ".

C'est vrai.

Justifions le.

Le dernier chiffre de n peut prendre comme valeurs:

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9.

Ainsi, nous pouvons dresser le tableau suivant:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 + n$	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90

Au total: le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

2. **Proposition 2**: " La suite (U_n) est convergente ".

C'est vrai.

Justifions le.

Nous allons appliquer le théorème des gendarmes selon lequel:

Si, à partir d'un certain rang, on a: $V_n \leqslant U_n \leqslant W_n$, et si les suites (V_n) et (W_n) convergent vers L, alors la suite (U_n) converge vers L.

Ici: $U_n = \frac{1}{n}$ pgcd $(20 ; n)$, pour tout $n \geqslant 1$.

Soient: • (V_n) la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par: $V_n = \frac{1}{n}$,

• (W_n) la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par: $W_n = \frac{20}{n}$.

En effet: • la plus petite valeur que peut prendre pgcd $(20 ; n) = 1$,

• la plus grande valeur que peut prendre pgcd $(20 ; n) = 20$.

Or: $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$.

Donc d'après le théorème des gendarmes: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

Au total: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ et donc (U_n) est convergente.

3. Proposition 3: **" Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a: $A \times B = B \times A$ ".**

C'est faux.

Justifions le.

D'après le cours, la multiplication entre deux matrices n'est pas commutative:

$$A \times B \neq B \times A.$$

Par exemple: • $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

• $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Au total: $A \times B \neq B \times A$.

4. a. Proposition 4: " $P_{A_n}(B_{n+1}) = 0,45$ ".

C'est vrai.

Justifions le.

D'après la matrice de transition, nous pouvons écrire:

$a_{n+1} = 0,55 \times a_n + 0,3 \times b_n$ et $b_{n+1} = 0,45 \times a_n + 0,7 \times b_n$ (1).

Or: $b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) \times a_n + P_{B_n}(B_{n+1}) \times b_n$ (2).

En identifiant (1) et (2), nous pouvons dire que:

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = 0,45.$$

Au total: $P_{A_n}(B_{n+1}) = 0,45$.

4. b. Proposition 5: " Il existe un état initial X_0 tel que: $b_1 = 3a_1$ ".

C'est faux.

Justifions le.

D'après la matrice de transition, nous pouvons écrire:

$a_1 = 0,55 \times a_0 + 0,3 \times b_0$ et $b_1 = 0,45 \times a_0 + 0,7 \times b_0$.

Dans ces conditions: $b_1 = 3a_1 \iff 0,45 \times a_0 + 0,7 \times b_0 = 1,65 \times a_0 + 0,9 \times b_0$

$$\Rightarrow b_0 = -6 \times a_0 < 0.$$

C'est impossible car: b_0 doit être positif.

Au total: il n'existe pas d'état initial X_0 avec $b_1 = 3a_1$.