Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

ÉPREUVE DU MERCREDI 20 JUIN 2018

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 8 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 3 (4 points)

En économie le résultat net désigne la différence entre la recette et les charges d'une entreprise sur une période donnée. Lorsqu'il est strictement positif, c'est un bénéfice.

Propriétaire d'une société, Pierre veut estimer son résultat net à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2018, celui-ci était de 10 000 euros.

Pierre modélise ce résultat net par une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 10\ 000$ et de terme général u_n tel que $u_{n+1} = 1,02\,u_n - 500$ où n désigne le nombre de mois écoulés depuis janvier 2018.

1. Quel est le montant du résultat net réalisé à la fin du mois de mars 2018 ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = u_n - 25\ 000$.
   - **a.** Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme a_0 et la raison.
   - **b.** Exprimer a_n en fonction de n et montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 25\ 000 - 15\ 000 \times 1,02^n$.
   - **c.** Résoudre l'inéquation $25\,000 - 15\,000 \times 1,02^n > 0$ où n désigne un entier naturel. Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

3. À l'aide d'un algorithme, Pierre souhaite déterminer le cumul total des résultats nets mensuels de la société jusqu'au dernier mois où l'entreprise est bénéficiaire.

   Recopier et compléter l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le nombre de mois pendant lesquels l'entreprise est bénéficiaire et la variable S le cumul total des résultats nets mensuels sur cette période.

```
U←10 000
S← 0
N← 0
Tant que ………..
      S  ………..
      U  ………..
      N  ………..
Fin Tant que
```

EXERCICE 3

[Polynésie 2018]

1. Déterminons le montant du résultat net réalisé à la fin du mois de mars 2018:

Il s'agit de calculer U_2. (février $= U_1$ et mars $= U_2$)

$U_2 = (1 + 2\%)\, U_1 - 500$, avec: $U_1 = (1 + 2\%)\, U_0 - 500$.

D'où: $U_2 = (1,02)\, U_1 - 500$

$= (1,02)\,[\,(1,02)\, U_0 - 500\,] - 500$

$= (1,02)^2 \times 10000 - 510 - 500$

$\Rightarrow U_2 = 9394$ euros.

Ainsi, le résultat net de la société de Pierre à la fin du mois de mars 2018 est de: 9394 euros.

2. a. Montrons que (a_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a_0 que l'on précisera:

$a_n = U_n - 25000 \iff a_{n+1} = U_{n+1} - 25000$

$\iff a_{n+1} = (1,02\, U_n - 500) - 25000 \quad (1).$

Or: $a_0 = U_0 - 25000 \Rightarrow a_0 = 10000 - 25000 = -15000$ et $U_n = a_n + 25000$.

Ainsi: $(1) \iff a_{n+1} = (1,02\,[\,a_n + 25000\,] - 500) - 25000$

$\Rightarrow a_{n+1} = 1,02\, a_n$.

Par conséquent, (a_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $a_0 = -15000$ euros.

2. b. b1. Exprimons a_n en fonction de n:

Comme $a_{n+1} = 1,02\, a_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$a_n = a_0 \times (1,02)^n, \text{ avec } a_0 = -15000 \text{ euros.}$$

2. b. b2. Déduisons-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 25000 - 15000 \times (1,02)^n$:

Nous savons que: * $a_n = -15000 \times (1,02)^n$

* $U_n = a_n + 25000$.

D'où: $U_n = -15000 \times (1,02)^n + 25000$ ou: $U_n = 25000 - 15000 \times (1,02)^n$.

2. c. Résolvons l'inéquation $25000 - 15000 \times (1,02)^n > 0$ et interprétons:

Nous allons déterminer " n " tel que: $U_n > 0$.

$U_n > 0 \iff 25000 - 15000 \times (1,02)^n > 0$

$$\iff (1,02)^n < \frac{5}{3}$$

$$\iff n \cdot \ln(1,02) < \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\iff n < \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1,02)}$$

$\Rightarrow$ $n < 25$ mois, car n est un entier naturel.

En conclusion: 25 mois après janvier 2018, le résultat net de la société de Pierre deviendra négatif !

En d'autres termes, à partir de **mars 2018**, l'entreprise familiale de Pierre commencera à perdre de l'argent.

3. Recopions et complétons l'algorithme pour atteindre l'objectif demandé:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

```
U ← 10000
S ← 0
N ← 0
Tant que   N ⩽ 25
    | S ← S + U
    | U ← 1,02 x U - 500
    | N ← N + 1
Fin Tant que
```