Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU VENDREDI 4 MAI 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

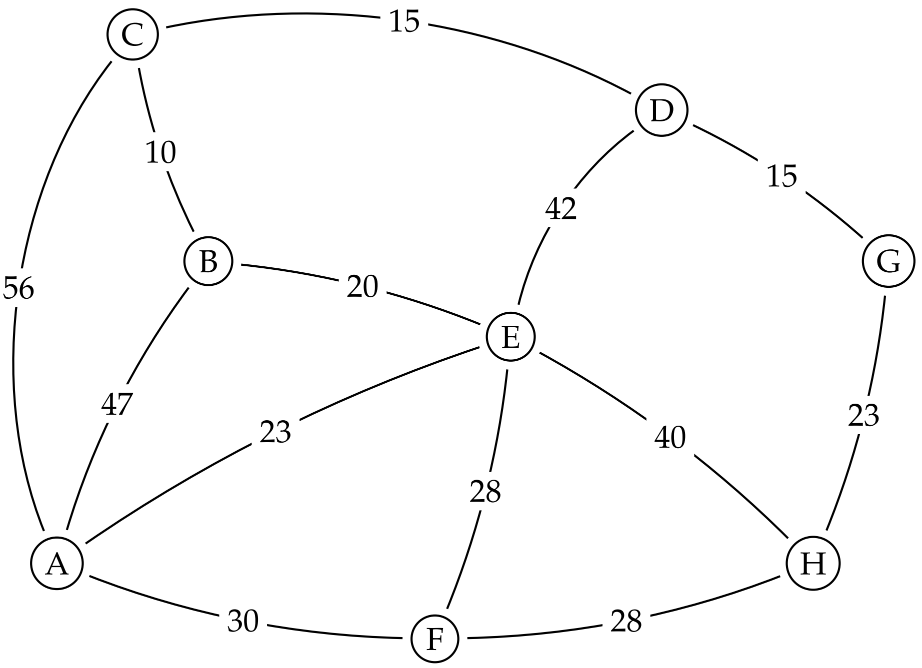
Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 3 (5 points)

Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les différents lieux A, B, C, D, E, F, G et H dans lesquels Louis est susceptible de se rendre chaque jour. Le lieu A désigne son domicile et G le lieu de son site de travail. Le poids de chaque arête représente la distance, en kilomètres, entre les deux lieux reliés par l'arête.



Déterminer le chemin le plus court qui permet à Louis de relier son domicile à son travail. On pourra utiliser un algorithme. Préciser la distance, en kilomètres, de ce chemin.

Partie B

Afin de réduire son empreinte énergétique, Louis décide d'utiliser lors de ses trajets quotidiens soit les transports en commun, soit le covoiturage.

- s'il a utilisé les transports en commun lors d'un trajet, il utilisera le covoiturage lors de son prochain déplacement avec une probabilité de $0,53$;
- s'il a utilisé le covoiturage lors d'un trajet, il effectuera le prochain déplacement en transport en commun avec une probabilité de $0,78$.

Louis décide de mettre en place ces résolutions au 1er janvier 2018.

Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la probabilité que Louis utilise le covoiturage n jour(s) après le 1er janvier 2018 ;
- t_n la probabilité que Louis utilise les transports en commun n jour(s) après le 1er janvier 2018 ;

La matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} c_n & t_n \end{pmatrix}$ traduit l'état probabiliste n jour(s) après le 1er janvier 2018.

Le 1er janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage.

1. **a)** Préciser l'état probabiliste initial P_0.

b) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.

On notera « C » et « T » ses deux sommets :

- « C » pour indiquer que Louis utilise le covoiturage ;
- « T » pour indiquer que Louis utilise les transports en commun.

2. Déterminer la matrice de transition du graphe probabiliste en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique.

3. Calculer l'état probabiliste P_2 et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

4. Soit la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ associée à l'état stable du graphe probabiliste.

a) Calculer les valeurs exactes de x et de y puis en donner une valeur approchée à $0,01$ près.

b) Selon ce modèle, peut-on dire qu'à long terme, Louis utilisera aussi souvent le covoiturage que les transports en commun ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3

[Inde, Pondichéry 2018]

Partie A:

Déterminons le chemin le plus court qui permet à Louis de relier son domicile à son travail:

Notons que: Louis souhaite aller de A à G.

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet que Louis doit suivre pour aller de A à G, tout en minimisant la distance (chemin le plus court): le trajet A - E - D - G.

Et ce trajet aura pour longueur: 23 km + 42 km + 15 km = 80 kilomètres.

Au total, le trajet que Louis doit suivre pour aller de A à G, tout en minimisant la distance parcourue est:

A - E - D - G, et ce trajet aura pour longueur **80 kilomètres**.

Partie B:

1. a. Précisons l'état probabiliste P_0:

D'après l'énoncé, le 1er janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage.

Dans ces conditions: $c_0 = 1$ et $t_0 = 0$.

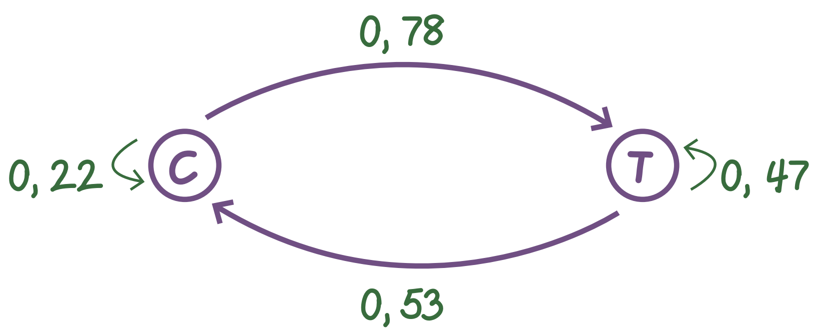
D'où l'état probabiliste P_0 est: $P_0 = (1 \quad 0)$.

1. b. Représentons le graphe probabiliste de cette situation:

Soient: • C, l'état: " Covoiturage ",

• T, l'état: " Transports en commun ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Donnons la matrice de transition M:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}.$$

3. Calculons P_2 et interprétons:

Il s'agit ici de calculer $P_2 = (c_2 \quad t_2)$.

D'après le cours: $P_2 = P_0 \times M^{(2-0)}$ **cad** $P_2 = P_0 \times M^2$.

Or: $P_0 = (1 \quad 0)$, **d'après question 1. a**

D'où: $P_2 = (1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}^2$

$= (0,4618 \quad 0,5387)$.

Donc: $c_3 = 0,4618$ et $t_3 = 0,5387$.

Au total: $P_2 = (46,18\% \quad 53,87\%)$.

Cela signifie qu'au bout de 2 jours: Louis a 46, 18% de chance d'utiliser le covoiturage et 53, 87% de chance d'avoir recours aux transports en commun.

4. a. a1. Calculons les valeurs exactes de x et y:

A long terme, l'état P_n à l'étape n converge vers P un état stable indépendant de l'état initial P_0.

Nous allons donc déterminer: $P = (x \quad y)$.

D'après le cours, nous savons que l'état stable P est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

Soit $P = (x \quad y)$, $P = P \times M \iff (x \quad y) = (x \quad y) \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}$

$$\iff (x \quad y) = (0,22x + 0,53y \quad 0,78x + 0,47y)$$

$$\iff \begin{cases} 0,22x + 0,53y = x \\ 0,78x + 0,47y = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,78x - 0,53y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{0,53}{1,31} \\ y = \dfrac{0,78}{1,31} \end{cases}$$, et donc: $P = \left(\dfrac{53}{131} \quad \dfrac{78}{131}\right)$.

Au total, l'état stable du système est: $P = \begin{pmatrix} \frac{53}{131} & \frac{78}{131} \end{pmatrix}$.

4. a. a2. Calculons les valeurs approchées à 0, 01 prés de x et y:

Les valeurs approchées à 0, 01 prés de x et y sont:

$x \approx 40\%$ **et** $y \approx 60\%$.

4. b. A long terme, Louis utilisera-t-il aussi souvent le covoiturage que les transports en commun ?

A la question précédente, nous avons trouvé: $P \approx (40\% \quad 60\%)$.

Cela signifie qu'après n jours (" n très grand "), la probabilité pour Louis d'utiliser le covoiturage sera d'environ 40% et celle d'avoir recours aux transports en commun sera d'environ 60%.

Or:
- **$40\% \neq 50\%$**
- **$60\% \neq 50\%$**.

Donc à long terme **non** Louis n'utilisera pas aussi souvent le covoiturage que les transports en commun.