Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU VENDREDI 22 JUIN 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

Exercice 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$ par

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + 3.$$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère. Une représentation graphique est donnée en annexe 2.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in [-2\,;4]$,

$$f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x}.$$

2. Étudier les variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-2\ ;0]$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.

4. On note f'' la fonction dérivée de f'. On admet que, pour tout $x \in [-2\,;4]$,

$$f''(x) = (8x-4)\mathrm{e}^{-2x}.$$

   a) Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

   b) En déduire le plus grand intervalle dans $[-2\ ;\ 4]$ sur lequel f est convexe.

5. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par $g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.

   a) Vérifier que la fonction G définie pour tout $x \in [-2\,;4]$ par $G(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ est une primitive de la fonction g.

   b) En déduire une primitive F de f.

6. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique donné en annexe 2, à rendre avec la copie.

   b) Par lecture graphique, donner un encadrement de $\mathcal{A}$, en unité d'aire, par deux entiers consécutifs.

   c) Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis une valeur approchée au centième.

EXERCICE 4

[France Métropolitaine 2018]

1. Montrons que, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$, $f'(x) = -4x\,e^{-2x}$:

Ici: • $f(x) = (2x+1)\,e^{-2x} + 3$ $\quad (u \times v) + 3$

• $Df = [-2\,;\,4]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = 2x+1$, $f_2(x) = e^{-2x}$ et $f_3(x) = 3$.

f est dérivable sur $[-2\,;\,4]$ car f_1, f_2 et f_3 sont dérivables sur $[-2\,;\,4]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-2\,;\,4]$.

Pour tout $x \in [-2\,;\,4]$:

$f'(x) = (2) \times (e^{-2x}) + (2x+1) \times (-2e^{-2x})$ $\quad (u' \times v + u \times v')$

$= 2e^{-2x} - 4x\,e^{-2x} - 2e^{-2x}$

$= -4x\,e^{-2x}$.

Au total, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$: $f'(x) = -4x\,e^{-2x}$.

2. Etudions les variations de f:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-2\,;\,4]$:

• **1^er^ cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-4x\,e^{-2x} = 0$, cad: $x = 0$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$)

• **$2^{\text{ème}}$ cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-4xe^{-2x} < 0$, cad: $x \in]0; 4]$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$)

• **$3^{\text{ème}}$ cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-4xe^{-2x} > 0$, cad: $x \in [-2; 0[$.

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[-2; 0]$,

(car sur $[-2; 0]$, $f'(x) \geqslant 0$)

• f est décroissante sur $[0; 4]$.

(car sur $[0; 4]$, $f'(x) \leqslant 0$)

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	-2		0		4
f'		$+$	0	$-$	
f			b		
	a				c

Avec: • $a = f(-2) \Rightarrow a = -3e^{4} + 3$,

• $b = f(0) \Rightarrow b = 4$,

• $c = f(4) \Rightarrow c = 9e^{-8} + 3$.

3. a. Montrons que sur $[-2\,;0]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

> • Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$.
>
> Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a\,;b]$ tel que: $f(c) = K$.
>
> Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a\,;b]$.
>
> • Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a\,;b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a\,;b]$.

Ici: • f est continue sur $[-2\,;0]$, donc sur $[-2\,;0[$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(-2) = -3\,e^4 + 3$

et: $f(0) = 4$.

• f est strictement croissante sur $[-2\,;0[$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ $(k = 0)$ admet une unique solution α appartenant à $[-2\,;0[$.

Au total: $f(x) = 0$ admet exactement une solution unique α sur $[-2\,;0[$.

3. b. Donnons une valeur approchée au dixième de cette solution:

Par tâtonnement, nous trouvons: $\alpha \approx -0,8$.

Au total: $\alpha \approx -0,8$.

4. a. Etudions le signe de f'' sur $[-2\,;\,4]$:

Ici: • $f(x) = (2x+1)\,e^{-2x} + 3$

• $Df = [-2\,;\,4]$

• $f''(x) = (8x-4)\,e^{-2x}$.

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-2\,;\,4]$, sachant que: $e^{-2x} > 0$.

• **1er cas**: $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 0$ ssi $(8x-4)\,e^{-2x} = 0$, cad: $x = \dfrac{1}{2}$.

• **2ème cas**: $f''(x) < 0$.

$f''(x) < 0$ ssi $(8x-4)\,e^{-2x} < 0$, cad: $x \in \left[-2\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$.

• **3ème cas**: $f''(x) > 0$.

$f''(x) > 0$ ssi $(8x-4)\,e^{-2x} > 0$, cad: $x \in \left]\dfrac{1}{2}\,;\,4\right]$.

D'où le tableau de signes de f'' sur $[-2\,;\,4]$ suivant:

x	-2		$\frac{1}{2}$		4
f''		$-$	0	$+$	

4. b. Déduisons-en le plus grand intervalle sur lequel f est convexe:

Soit $[\,e\,;\,f\,]$, l'intervalle recherché.

f est convexe sur [e ; f] ssi: pour tout $x \in [\, e ; f\,]$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or: $f''(x) \geqslant 0$ quand $x \in [\,\frac{1}{2} ; 4\,]$.

Au total, le plus grand intervalle sur lequel f est convexe est: $[\,\frac{1}{2} ; 4\,]$.

5. a. Vérifions que G est bien une primitive de la fonction g:

Sur l'intervalle [-2 ; 4], G est une primitive de g ssi: $G'(x) = g(x)$.

Ici: $G(x) = (-x - 1)\, e^{-2x}$ **(u x v)**.

D'où: $G'(x) = (-1) \times (e^{-2x}) + (-x - 1) \times (-2e^{-2x})$ **(u' x v + u x v')**

$$= -e^{-2x} + 2x e^{-2x} + 2e^{-2x}$$

$$= 2x e^{-2x} + e^{-2x} \quad \text{ou:} \quad (2x + 1)\, e^{-2x}.$$

Au total: G est bien une primitive de g sur [-2 ; 4].

5. b. Déduisons-en une primitive F de f:

Notons que sur [-2 ; 4]: $f(x) = g(x) + 3$.

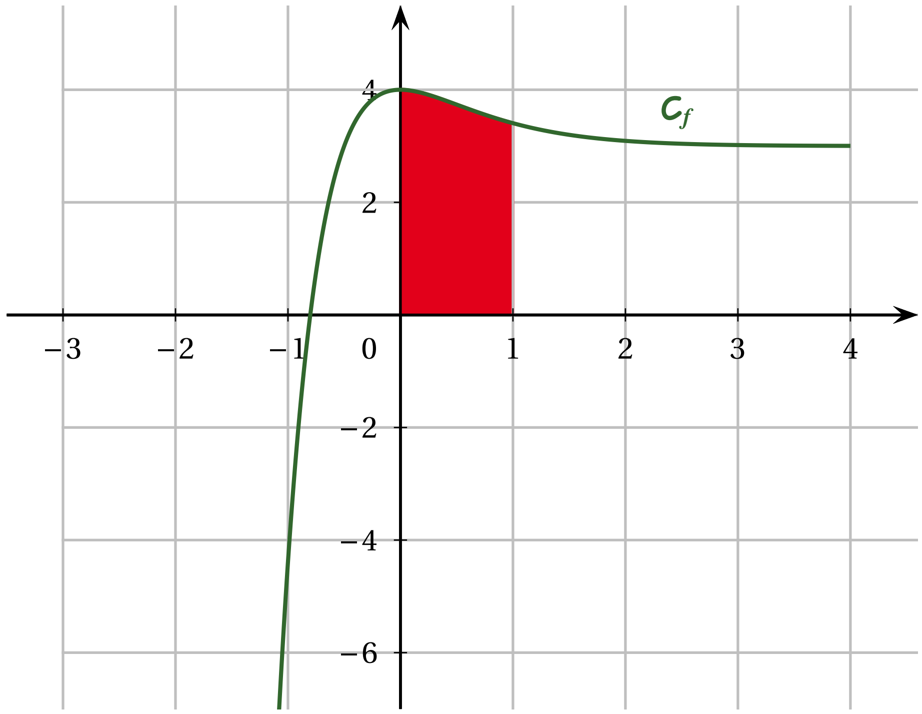
Dans ces conditions, une primitive F de f sur l'intervalle [-2 ; 4] est:

$F(x) = G(x) + 3x$ cad: $F(x) = (-x - 1)\, e^{-2x} + 3x$.

Au total: $F(x) = (-x - 1)\, e^{-2x} + 3x$ est une primitive de la fonction f.

6. a. Colorions le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique:

Le domaine $\mathcal{D}$ colorié en rouge sur le graphique est le suivant:



6. b. A l'aide du graphique, donnons un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire $\mathscr{A}$:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine compris entre la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, est telle que: $3 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 4$.

Au total, l'aire demandée $\mathscr{A}$ est telle que: $3 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 4$.

6. c. c1. Calculons la valeur exacte de $\mathscr{A}$:

Ici, il s'agit de calculer: $\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Or: $\int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0)$.

Dans ces conditions: $\mathscr{A} = (-2e^{-2} + 3) - (-1)$

$= 4 - 2e^{-2}$.

Au total, la valeur exacte de $\mathscr{A}$ est: $\mathscr{A} = 4 - 2e^{-2}$.

6. c. c2. Calculons une valeur approchée de $\mathscr{A}$:

A l'aide d'une machine à calculer, une valeur approchée de $\mathscr{A}$ est:

$$\mathscr{A} \approx 3,73.$$

Au total, une valeur approchée de $\mathscr{A}$ est: $\mathscr{A} \approx 3,73$ au centième.