Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MARDI 19 JUIN 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

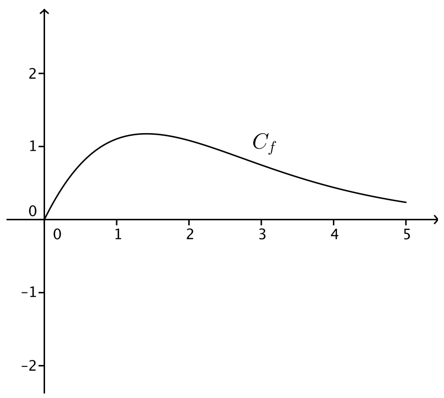
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

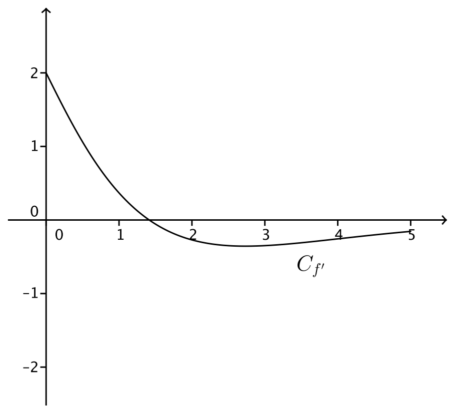
Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.

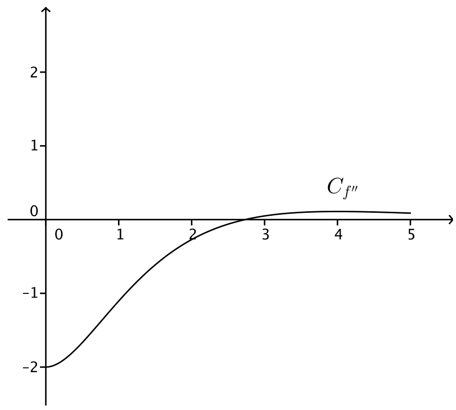
EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats



Courbe C_f



Courbe $C_{f'}$



Courbe $C_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe C_f représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;5]$ ainsi que les courbes représentatives $C_{f'}$ et $C_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.

Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

1. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.

2. **a.** Donner un intervalle défini par deux entiers sur lequel la fonction f semble convexe.

b. Expliquer pourquoi on peut conjecturer que la courbe C_f admet un point d'inflexion. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de ce point d'inflexion.

3. Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0 ?

$y = x$ $\qquad$ $y = 2x + 1$ $\qquad$ $y = 2x$ $\qquad$ $y = \dfrac{3}{4}x$

4. On note $I = \displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$ où f' est la fonction dérivée de f.
Comment s'interprète graphiquement ce nombre I ?

Partie B

La fonction f représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f(x) = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}$.

1. **a.** Montrer que la dérivée f' de f est définie par $f'(x) = \left(-x^2 + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x de l'intervalle $[0;5]$.

b. Déterminer les variations de f sur $[0;5]$ et préciser l'abscisse de son maximum.

c. Donner la valeur arrondie au millième du maximum de f.

2. Avec un outil de calcul on obtient, pour $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$ et $f(1)$, la même valeur approchée 1,103 64.
Ces deux valeurs sont-elles égales ?

EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2018]

Partie A:

1. Donnons l'encadrement demandé:

A l'aide du **premier** graphique, à savoir celui de la courbe représentative de f, la fonction f semble atteindre son maximum (M) quand: $1 < x < 2$.

Au total, l'encadrement demandé est: $1 < x < 2$.

2. a. Donnons un intervalle défini par deux entiers sur lequel f semble convexe:

Soit $[\, e\,;f\,]$, l'intervalle recherché.

f est convexe sur $[\, e\,;f\,]$ ssi: pour tout $x \in [\, e\,;f\,]$, $f''(x) \geq 0$.

A l'aide du troisième graphique, à savoir celui de la courbe représentative de f'', la fonction f semble convexe sur: $[\, 2\,;5\,]$.

Au total, l'intervalle sur lequel f semble convexe est: $[\, 2\,;5\,]$.

2. b. b1. Expliquons pourquoi on peut conjecturer que la courbe Cf admet un point d'inflexion:

Nous pouvons conjecturer le fait que la courbe Cf admet un point d'inflexion car: la dérivée seconde s'annule et change de signe.

En effet, ici, à l'aide du troisième graphique: la dérivée seconde semble s'annuler et changer de signe quand $x \in]\, 2\,;3\,[$.

2. b. b2. Donnons un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de ce point d'inflexion:

Soit x_I, l'abscisse du point d'inflexion, x_I est tel que: $2 < x_I < 3$.

3. Déterminons l'équation de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse 0:

L'équation de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse $x = 0$ est:

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

Par lecture du premier et second graphiques: $f'(0) = 2$ et $f(0) = 0$.

Dans ces conditions, l'équation de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse $x = 0$ est: $y = 2x$.

4. Comment interpréter graphiquement ce nombre I ?

Ce nombre I s'interprète comme suit: I correspond, en unités d'aire et à l'unité prés, à l'aire du domaine compris entre la courbe (Cf'), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Notons que: $0 < I < 1$.

Partie B:

1. a. Montrons que pour tout $x \in [0; 5]$, $f'(x) = (-x^2 + 2)e^{-x}$:

Ici: • $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ $(u \times v)$

• $Df = [0; 5]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = x^2 + 2x$ et $f_2(x) = e^{-x}$.

f est dérivable sur $[0; 5]$ car f_1 et f_2 sont dérivables sur $[0; 5]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$.

Pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$:

$f'(x) = (2x+2) \times (e^{-x}) + (x^2+2x) \times (-e^{-x})$ **$(u' \times v + u \times v')$**

$= 2x\, e^{-x} + 2e^{-x} + (-x^2\, e^{-x} - 2x\, e^{-x})$

$= 2\, e^{-x} - x^2\, e^{-x}$ ***ou***: $(-x^2+2)\, e^{-x}$.

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$, nous avons bien: $f'(x) = (-x^2+2)\, e^{-x}$.

I. b. bI. Déterminons les variations de f sur $[\,0\,;5\,]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$:

- **1[er] cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $(-x^2+2)\, e^{-x} = 0$, cad: $x = \sqrt{2} \in [\,0\,;5\,]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$)

- **2[ème] cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $(-x^2+2)\, e^{-x} < 0$, cad: $x \in \,]\sqrt{2}\,;5\,]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$)

- **3[ème] cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $(-x^2+2)\, e^{-x} > 0$, cad: $x \in [\,0\,;\sqrt{2}\,[$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[\,0\,;\sqrt{2}\,]$,

(car sur $[\,0\,;\sqrt{2}\,]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[\sqrt{2}\,;5]$.

(car sur $[\sqrt{2}\,;5]$, $f'(x) \leqslant 0$)

Nous pouvons alors dresser le tableau de variation suivant:

x	0		$\sqrt{2}$		5
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(\sqrt{2}) \Rightarrow b = (2 + 2\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{2}}$,

• $c = f(5) \Rightarrow c = 35\,e^{-5}$.

1. b. b2. Précisons l'abscisse du maximum de f :

D'après le tableau de variation précédent, nous pouvons dire que:

l'abscisse du maximum de f est $\boldsymbol{x_M = \sqrt{2}}$.

Ainsi le maximum de f a pour coordonnées: $(\sqrt{2}\,;(2 + 2\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{2}})$.

1. c. Donnons la valeur arrondie au millième du maximum de f :

Les valeurs arrondies au millième des coordonnées du maximum de f sont:

$$x_M \approx 1,414 \text{ et } y_M \approx 1,174.$$

2. Ces deux valeurs sont-elles égales ?

• $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx = [f(x)]_0^1$

$= f(1) - f(0)$

$= f(1)$, car: $f(0) = 0$.

• $f(1) = f(1)$, par définition.

Donc: oui ces deux valeurs sont égales.